

∞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie décembre 1999 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(3; 0; 1)$, $B(0; -1; 2)$ et $C(1; -1; 0)$.

- Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.
- Soit D le point de coordonnées $(1, 1, -2)$. Calculer le produit scalaire du vecteur \overrightarrow{DA} et du vecteur $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$.
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par D et dont un vecteur directeur est \vec{n} .
 - Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de cette droite avec le plan ABC.
 - Calculer DH (distance du point D au plan ABC).
- Calculer les coordonnées du point D' , symétrique du point D par rapport au plan ABC.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) ; unité graphique : 2 cm.

- Tracer les cercles de centre O et de rayons 1 et 2. Placer les points A, B, et D d'affixes respectives $\sqrt{3} + i$, $\sqrt{3} - i$ et $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la translation T de vecteur d'affixe 1.
 - Déterminer les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ des points A' et B' , images respectives des points A et B par la rotation R.
 - Déterminer l'affixe $z_{D'}$, du point D' , image du point D par la translation T.
 - Placer les points A' , B' et D' .
- Déterminer un argument du nombre complexe $\frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_{D'}}$.
Justifier que la droite (OD') est une médiatrice du triangle $OA'B'$.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

- On suppose que n est un entier pair. On pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.
 - Montrer que M et N sont des entiers impairs.
 - En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N .
- On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p + 1$, avec p entier naturel.
 - Montrer que M et N sont des entiers pairs.
 - En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N .

3. Pour tout entier naturel non nul n , on considère l'entier $81n^2 - 1$.
 - a. Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction des entiers M et N .
 - b. Démontrer que si n est pair alors $81n - 1$ est impair.
 - c. Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

PROBLÈME**11 points****Commun à tous les candidats****Partie A - Résolution d'une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2y = e^{2x}, \quad (E).$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$ (E₀).
3. Démontrer qu'une fonction v définie sur \mathbb{R} est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E₀).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B - Étude d'une fonctionLe plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x + 1)e^{2x}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Étudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x .
3. Soit un réel α strictement inférieur à -1 . On considère le domaine plan \mathcal{D} limité par \mathcal{C} , les droites d'équation $x = \alpha$, $x = -1$ et l'axe des abscisses.
 - a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire $\mathcal{D}(\alpha)$ du domaine \mathcal{D} .
 - b. Déterminer la limite de $\mathcal{D}(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

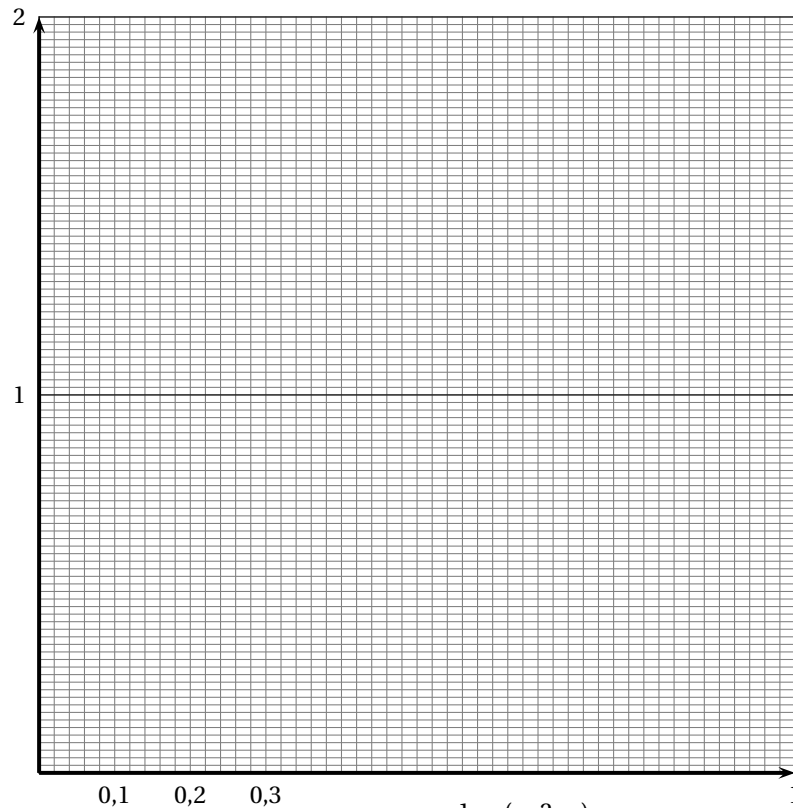
Partie C - Résolution d'une équation

1. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0,2; 0,3]$.
2. Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$						

Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec une précision de 10^{-2} près par défaut.

3. Sur le papier millimétré, ci-dessous, où les unités sont de 10 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées, tracer l'arc de la courbe \mathcal{C} pour x appartenant à $[0; 0,3]$.
Faire apparaître x_0 sur le graphique.



Démontrer que x_0 satisfait à la relation : $x_0 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{x_0 + 1} \right)$.

Partie D - Approximation de x_0

1. Soit h la fonction définie sur $I = [0,2; 0,3]$ par

$$h(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{x_0 + 1} \right).$$

- a. Démontrer que pour tout x de I , $h(x)$ appartient à I .
 - b. Démontrer que pour tout x de I , $|h'(x)| \leq 0,42$.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0,2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = h(u_n)$.
- a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - x_0| \leq 0,42|u_n - x_0|$.
À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire que, pour tout entier naturel n on a : $|u_n - x_0| \leq 0,1 \times (0,42)^n$.
 - b. Déterminer la limite de (u_n) .
 - c. Déterminer un entier p tel que $|u_p - x_0| \leq 10^{-5}$.
 - d. On note b la valeur de u_p affichée sur la calculatrice. Déterminer β valeur décimale approchée par défaut de b à 10^{-5} près.
Classer par ordre croissant les réels $f(\beta)$, $f(\beta + 10^{-5})$ et 2.
En déduire la valeur décimale approchée par défaut de x_0 à 10^{-5} près.