Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie juin 1999

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux évènements suivants :

A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;
B : « On obtient au plus une blanche ».

1. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».

   b. Calculer la probabilité de l'évènement : « On obtient exactement une boule blanche ».

   c. En déduire que les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}, \quad p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \quad p(B) = \frac{n+1}{2^n}.$$

2. Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si, et seulement si,

$$2^{n-1} = n+1.$$

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux par

$$u_n = 2^{n-1} - (n+1).$$

   Calculer u_2, u_3, u_4.

   Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les évènements A et B soient indépendants.

Exercice 2 **4 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E)\ :\ z^3 - 8 = 0$.

2. On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{B}} = 2 \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = -1 - \text{i}\sqrt{3}.$$

   a. Écrire z_{A} et z_{C} sous la forme trigonométrique.

   b. Placer les points A, B et C.

   c. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \text{e}^{2i\frac{\pi}{3}} z.$$

   a. Caractériser géométriquement l'application f.

   b. Déterminer les images des points A et C par f.

   En déduire l'image de la droite (AC) par f.

Exercice 2 **4 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
   En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier

$$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}.$$

   a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p, par 7 ?
   b. Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
   c. Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :

$$a = \overline{1\,001\,001\,000} \quad b = \overline{1\,000\,100\,010\,000}.$$

   Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p.
   Sont-ils divisibles par 7 ?

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{2x-2}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On prendra 5 cm comme unité.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Vérifier que, pour tout réel x non nul : $f(x) = x\left[1 - 2\mathrm{e}^{-2} \times \left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}\right)\right]$.
2. Déterminer f'. Étudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f.
3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et (D).
4. On note A le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe $(\mathscr{C})$.
5. a. On note I l'intervalle $[0 ; 0{,}5]$.
   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera a.
   b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de a.
6. Construire la courbe $(\mathscr{C})$, l'asymptote (D) et la tangente (T).

Partie B

Détermination d'une valeur approchée de a.

On définit dans $\mathbb{R}$ la suite (u_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \mathrm{e}^{2u_n-2} \end{array}\right.$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \text{e}^{2x-2}$.
   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$.
   En déduire $g(a)$.
2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, on a :
$$|g'(x)| \leqslant \frac{2}{\text{e}}.$$
3. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à I.
4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \dfrac{2}{\text{e}}|u_n - a|$.
5. Démontrer, par récurrence, que : $|u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{2}{\text{e}}\right)^n$.
6. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
7. Déterminer un entier naturel p tel que : $|u_p - a| < 10^{-5}$.
8. En déduire une valeur approchée de a à 10^{-5} près : on expliquera l'algorithme utilisé sur la calculatrice.