∽ Baccalauréat S Pondichéry mai 1999 ∾

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les questions 2 *et* 3 *sont indépendantes.*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
   On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
2. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.

   b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$(unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+\text{i})$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-\text{i})$ et le point A d'affixe $z_{\text{A}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   a. Déterminer l'affixe du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport - 3.

   b. Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   c. Placer dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4.

   d. Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.

   e. Soient I le milieu du segment $[\text{M}_3\text{M}_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points M_1, M_3, M_5 et M_4 forment un carré.

Exercice 2 **4 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On admet que 1 999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;\ b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1 999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) : n^2 - Sn + 11\,994 = 0 \text{ où } S \text{ est un entier naturel.}$$

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ?
   Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11 994.
   En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1 999 est un nombre premier ?
Préciser le raisonnement employé.
La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41
43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

Exercice 2 **4 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère un triangle ABC du plan.

1. **a.** Déterminer et construire le point G, barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{B}\ ;\ -1)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ 1)].$$

   b. Déterminer et construire le point G′, barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{B}\ ;\ 5)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ -2)].$$

2. **a.** Soit J le milieu de [AB].
   Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{GG}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JG}'}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et en déduire l'intersection des droites (GG′) et (AB).

   b. Montrer que le barycentre I de $[(\mathrm{B}\ ;\ 2)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ -1)]$ appartient à (GG′).

   c. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de [CD] et K le milieu de [GA].

3. Déterminer trois réels a, d et c tels que K soit barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ a)\ ;\ (\mathrm{D}\ ;\ d)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ c)].$$

4. Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).
   Déterminer les réels a' et c' tels que X soit barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ a')\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ c')].$$

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

Soit la fonction numérique f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}.$$

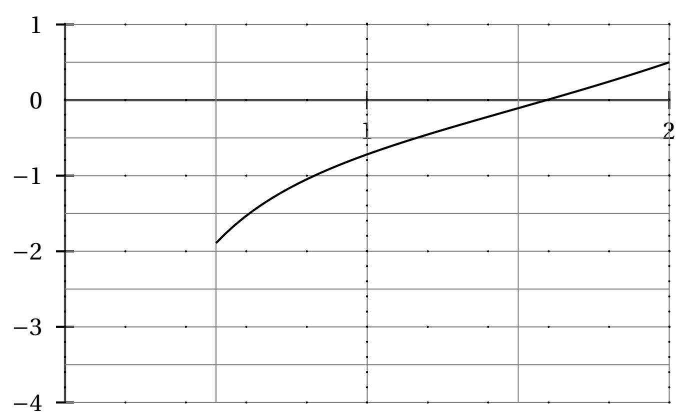
Partie A

Recherche graphique d'un extremum

L'observation de la courbe représentative de la fonction f sur l'écran graphique d'une calculatrice donne à penser que f admet un minimum sur l'intervalle [0,5 ; 2].

On se propose d'en donner une valeur approchée.

Observer ci-dessous la représentation graphique de la fonction f', dérivée de f sur l'intervalle [0,5 ; 2].



Quels sont les éléments graphiques concernant f' qui vont dans le sens de l'existence d'un minimum de f sur $[0,5 ; 2]$?
À l'aide de ce graphique, donner un encadrement d'amplitude 0,2 de l'abscisse de ce minimum.

Partie B
Étude de la fonction F
On considère la fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2$.

1. Déterminer les variations de h (on précisera $h(0)$ mais la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).
2. Déterminer le signe de $h\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

   En déduire qu'il existe un unique réel a appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2} ; 2\right]$ tel que $h(a) = 0$.
   En déduire le signe de h sur $[0 ; +\infty[$.
3. Étude de la fonction f

   a. Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

   b. Montrer que, pour tout nombre x strictement positif,

   $$f'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2}{x^3}.$$

   En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

   c. Montrer que $f(a) = \dfrac{-1}{a(a-2)}$ et en déduire le signe de $f(a)$.

Partie C
Recherche d'un encadrement du nombre a

1. Démontrer que, sur $]0 ; +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ équivaut à

   $$2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) = x.$$
2. Soit la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

   $$g(x) = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

   On pose $\mathrm{I} = \left[\dfrac{3}{2} ; 2\right]$. Montrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Soit la suite $(x_n)_{n>1}$ définie par

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{3}{2} \\ x_{n+1} & = & g(x_n) \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1.$$

   On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, x_n appartient à I.
4. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

   $$|x_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - a|$$

   $$\text{et} \quad |x_n - a| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

   En déduire que la suite (x_n) converge vers a.
5. Déterminer un entier p tel que x_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel a. Donner une valeur approchée de x_p avec trois décimales.

Partie D

Quelques propriétés d'une primitive de f

On appelle F la primitive de f sur $[0~;~+\infty[$ qui s'annule en 1. Ainsi l'on a, pour tout réel x de $]0~;~+\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier le sens de variation de F sur $[0~;~+\infty[$.

2. Démontrer que, pour tout x supérieur ou égal à 2,

$$\int_2^x f(2)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par comparaison de limites, et en utilisant la relation de Chasles, en déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.