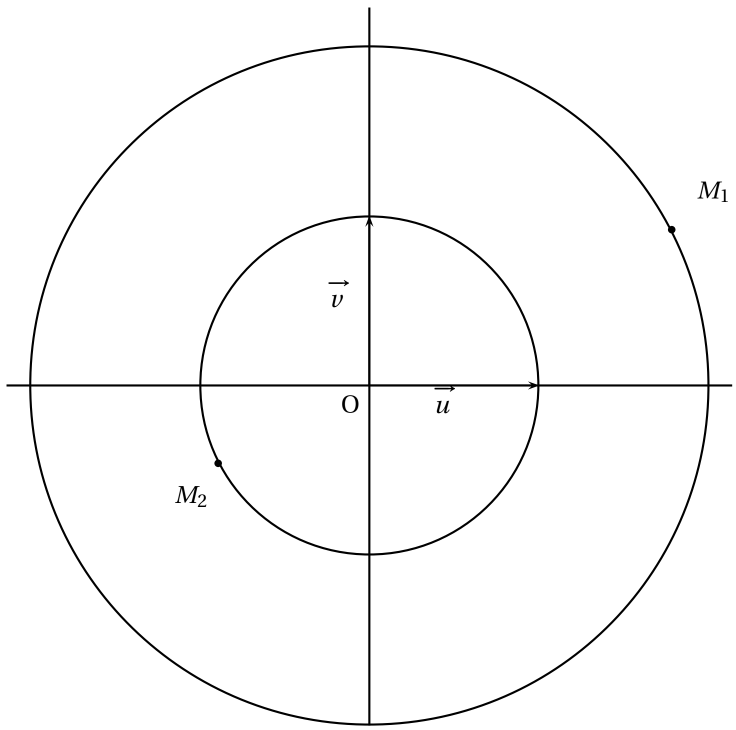
Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2000

EXERCICE 1 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Dans tout l'exercice, z est un nombre complexe non nul.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -\dfrac{1}{z}$, puis le point I milieu du segment $[MM']$. L'affixe de I est donc $\dfrac{1}{2}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$.
Note : les questions **2, 3** et **4** sont largement indépendantes.

1. **a.** Donner une relation entre les modules de z et z'.
Donner une relation entre leurs arguments.

b. Sur la figure ci-dessous est placé le point M_1 d'affixe z_1 sur le cercle de centre O et de rayon 2.
Expliquer comment on peut obtenir géométriquement le point M_1', puis le point I_1 milieu du segment $[M_1 M_1']$. Effectuer cette construction.



2. Pour cette question, θ est un réel et M est le point d'affixe $z = e^{\text{i}\theta}$.

a. Calculer sous forme algébrique l'affixe de I.

b. Sur la figure ci-dessous est placé le point M_2 d'affixe z_2 sur le cercle $\mathscr{C}$, de centre O et de rayon 1. Expliquer comment, en utilisant le résultat de la question **2 a**, on peut obtenir géométriquement le point I_2 milieu du segment $[M_2 M_2']$.
Effectuer cette construction.
Donner (sans justification) l'ensemble décrit par I lorsque M décrit $\mathscr{C}$.

3. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O.

a. Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels M et I sont confondus.

b. Développer $(z-2\mathrm{i})^2+3$.
Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels l'affixe de I est 2i.

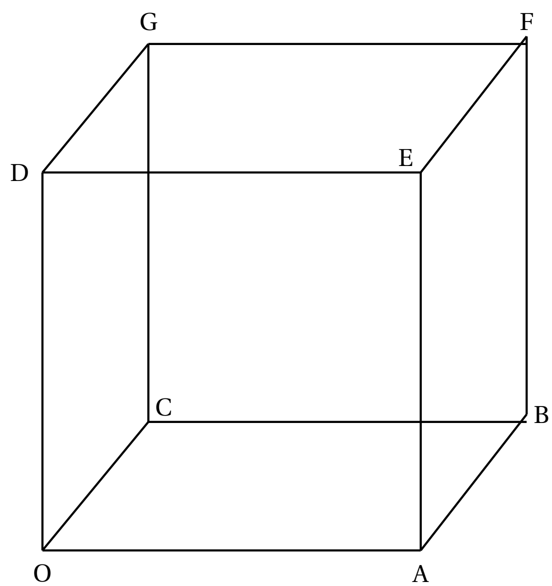
4. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O, d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels).

a. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de l'affixe de I.

b. Déterminer l'ensemble A des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des abscisses.

c. Déterminer l'ensemble B des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des ordonnées.

EXERCICE 2 5 points
Enseignement obligatoire



Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessus.
L'espace est orienté par le repère orthonormai direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\,\overrightarrow{\mathrm{OC}},\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$. On désigne par a un réel strictement positif.
L, M et K sont les points définis par $\overrightarrow{\mathrm{O}L} = a\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, et $\overrightarrow{\mathrm{B}K} = a\overrightarrow{\mathrm{BF}}$.

1. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{D}M} \wedge \overrightarrow{\mathrm{D}L}$.

b. En déduire l'aire du triangle DLM.

c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).

2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).

a. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{O}M}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O}K} = \overrightarrow{\mathrm{O}H}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O}K}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}H}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}K}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}H} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OK}}$.
Démontrer que $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$. En déduire que H appartient au segment [OK].

c. Déterminer les coordonnées de H.

d. Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que $HK = \dfrac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2+2}}$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a.

EXERCICE 2 5 points

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB, rectangle et isocèle en O. On a donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\dfrac{\pi}{2}$ et S_O la symétrie de centre O.

On place un point C, non situé sur la droite (AB), on trace les carrés BEDC et ACFG directs. On a donc $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

1. **a.** Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ composée des réflexions d'axes (AB) et (AO).

b. En écrivant R_B sous la forme d'une composée de deux réflexions, démontrer que $R_A \circ R_B = S_O$.

2. **a.** Déterminer l'image de E par $R_A \circ R_B$.

b. En déduire que O est le milieu du segment [EG].

c. On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle.

Étudier l'image de C par la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$. Déterminer la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$.

d. Placer H le symétrique de D par rapport à O.

Démontrer que $R_F(H) = D$. Démontrer que le triangle FOD est rectangle et isocèle en O.

PROBLÈME 10 points

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) & = & \dfrac{x^2+x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \\ f(0) & = & 0. \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité graphique 5 cm).

Partie A

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

2. Pour $x > 0$, calculer $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0. (on pourra utiliser, pour n entier naturel non nul, $\lim\limits_{u \to +\infty} u^n e^{-u} = 0$.

Que peut-on en déduire pour la fonction f ? Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

3. Démontrer que pour tout x de $]0, +\infty[$ on a $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.

4. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.

Partie B

On note g la fonction définie sur $]0\ ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

1. Montrer que dans $]0\ ;\ +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.
2. Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.
3. On pose $A = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$. Encadrer A à 2×10^{-1} près (justifier) et montrer que $A = f'(\alpha)$.
4. Pour tout $a > 0$, on note T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Montrer que T_a a pour équation $y = Ax$. Tracer T_a, puis la courbe $\mathscr{C}$.
5. Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à $\mathscr{C}$ (en des points d'abscisses non nulles), seule T_α passe par l'origine O.
6. On admettra que T_α est au-dessus de $\mathscr{C}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   a. Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, suivant le réel m donné.
   b. Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$ selon le réel m donné.

Partie C

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Sans calculer explicitement u_n, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que la fonction h, définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0,\ +\infty[$.
3. Calculer u_n. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Étudier la convergence de la suite (u_n).