Baccalauréat S Asie juin 2000

Exercice 1 4 points

Commun à tous les candidats

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les évènements suivants :

A_n : « Alice atteint la cible au n^{e} coup ».

B_n : « Alice rate la cible au n^{e} coup ».

On pose $P_n = p(A_n)$.

Pour les questions **1.** et **2.** on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
$$p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{15}.$$
3. Pour $n \geqslant 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q.
4. Écrire u_n puis p_n en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -\text{i}\ ;\ z_{\text{B}} = 3\ ;\ z_{\text{C}} = 2 + 3\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = -1 + 2\text{i}.$$

1. Placer sur une figure les points A, B, C et D.
2. **a.** Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe $\frac{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{D}} - z_{\text{B}}}$.

   b. Calculer le complexe $\frac{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{D}} - z_{\text{B}}}$.

   c. Que pouvez-vous conclure concernant les segments [AC] et [BD] ?
3. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

   b. Calculer l'aire s_0 du quadrilatère ABCD.
4. **a.** Placer sur la figure précédente les points A_1, B_1, C_1 et D_1 tels que $\overrightarrow{\text{DA}_1} = \overrightarrow{\text{A}_1\text{B}_1} = \overrightarrow{\text{B}_1\text{C}}$, où les points A_1 et B_1 appartiennent à [DC], le quadrilatère $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$ étant un carré situé àl'extérieur du quadrilatère ABCD.

   b. Tracer le carré $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$ et déterminer son aire s_1.
5. **a.** On continue par le même procédé : un carré $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n\text{D}_n$ étant déterminé, on considère les points A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} et D_{n+1} tels que $\overrightarrow{\text{D}_n\text{A}_{n+1}} = \overrightarrow{\text{A}_{n+1}\text{B}_{n+1}} = \overrightarrow{\text{B}_{n+1}\text{C}_n}$ où les points A_{n+1} et B_{n+1} appartiennent à $[\text{D}_n\text{C}_n]$, le quadrilatère $\text{A}_{n+1}\text{B}_{n+1}\text{C}_{n+1}\text{D}_{n+1}$ étant un carré situé à l'extérieur du carré $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n\text{D}_n$.

   Tracer le carré $\text{A}_2\text{B}_2\text{C}_2\text{D}_2$.

b. Soit s_n l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$.
Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n, puis de n.
En déduire s_n , en fonction de n.

c. Déterminer, en fonction de n, l'aire S_n de la figure obtenue par la juxtaposition du quadrilatère ABCD et des carrés $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, … et $A_nB_nC_nD_n$.

d. La suite (s_n) est-elle convergente ? Préciser sa limite si elle existe.

Exercice 2 5 points
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Déterminer PGCD(2 688 ; 3 024).
2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.

   a. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes
   (1) $2\ 688x + 3\ 024y = -\ 3\ 360$;
   (2) $8x + 9y = -\ 10$.

   b. Vérifier que $(1\ ;\ -\ 2)$ est une solution particulière de l'équation (2).

   c. Déduire de ce qui précède les solutions de (2).
3. Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
   On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives

$$x + 2y - z = -2 \quad \text{et} \quad 3x - y + 5z = 0.$$

   a. Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

   b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).

   c. En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Problème 11 points

Partie A
Étude d'une fonction
On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 5 cm.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes de $(\mathscr{C})$.
2. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l' intervalle $\left[\frac{1}{e}\,;\,1\right]$ une solution unique, notée α.
   Déterminer un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.
   Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B
Calcul d'aire

1. Déterminer une équation de la tangente (D) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.
2. **a.** Soit φ la fonction définie, pour tout $x > 0$, par :

   $$\varphi(x) = x - x^2 + \ln x.$$

   Calculer $\varphi'(x)$.
   En déduire le sens de variation de φ, puis le signe de $\varphi(x)$, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   b. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

   c. En déduire la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (D).
3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente (D).

   a. Hachurer ce domaine.

   b. Soit $\mathscr{A}$ son aire, en cm^2. Écrire la valeur exacte de $\mathscr{A}$ comme expression polynomiale du second degré en α.

Partie C
Étude d'une suite
Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{e}\,;\,\alpha\right]$. On note M_0 le point de $(\mathscr{C})$d abscisse x_0.

1. **a.** Donner une équation de la tangente (T_0) à $(\mathscr{C})$ en M_0, en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

   b. Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses. Écrire x_1 en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.
2. On considère la fonction h définie sur $\left]\frac{1}{e}\,;\,\alpha\right]$ par :

   $$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.\ \text{(On remarquera que } h(x_0) = x_1\text{)}.$$

a. Montrer que $h'(x) = \dfrac{f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2}$.

b. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $\left]\dfrac{1}{e}\,;\,\alpha\right]$.

c. En déduire que h est strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{e}\,;\,\alpha\right]$, puis montrer que $x_1 < \alpha$.

d. En écrivant $h(x) - x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe de $h(x) - x$ sur $\left]\dfrac{1}{e}\,;\,\alpha\right]$

En déduire que $\dfrac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$.

3. **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $\left]\dfrac{1}{e}\,;\,\alpha\right]$, $h(x)$ appartient à $\left]\dfrac{1}{e}\,;\,\alpha\right]$.

b. On considère la suite (x_n) de réels définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour tout entier naturel n.

Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.