

∞ Baccalauréat S La Réunion juillet 2000 ∞

Exercice 1

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité : 2 cm). On dit qu'un triangle équilatéral ABC est direct si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$. On pose $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

1.
 - a. Vérifier que 1, j et j^2 sont solutions de l'équation $z^3 = 1$.
 - b. Calculer $(1 - j)(1 + j + j^2)$; en déduire que $1 + j + j^2 = 0$.
 - c. Vérifier que $e^{i\frac{\pi}{3}} + j^2 = 0$.
2. Dans le plan complexe, on considère trois points A, B, C , deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c .
 - a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 - b. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si : $a + bj + cj^2 = 0$.
3. À tout nombre complexe $z \neq 1$, on associe les points R, M et M' d'affixes respectives 1, z et \bar{z} .
 - a. Pour quelles valeurs de z les points M et M' sont-ils distincts?
 - b. En supposant que la condition précédente est réalisée, montrer que l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que le triangle RMM' soit équilatéral direct est une droite privée d'un point.

Exercice 2 (obligatoire)

5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On désigne par Γ la courbe paramétrée, ensemble des points $M(\theta)$ dont les coordonnées $(x(\theta), y(\theta))$ sont définies par

$$\begin{cases} x(\theta) = 20e^{-\theta} \cos \theta \\ y(\theta) = 20e^{-\theta} \sin \theta \end{cases} \quad \text{où } \theta \in [0; +\infty[$$

1. Soient M et M_1 , les points de Γ correspondant respectivement aux paramètres θ et $\theta + \pi$.
 - a. Démontrer qu'il existe un réel k , indépendant de θ , que l'on déterminera, tel que

$$\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}.$$

- b. En déduire une transformation géométrique par laquelle, pour tout réel θ positif, M_1 est l'image de M .
2. On appelle Γ_1 la partie de Γ correspondant à θ élément de l'intervalle $[0; \pi]$.
 - a. Montrer que :

$$x'(\theta) = -20\sqrt{2}e^{-\theta} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad y'(\theta) = -20\sqrt{2}e^{-\theta} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

- b. Étudier le sens de variations des fonctions x et y sur $[0; \pi]$; rassembler les résultats dans un tableau unique et indiquer les points de Γ , en lesquels la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

3. Tracer Γ_1 , ainsi que ses tangentes aux points $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $M(\pi)$.
(unité graphique : 1 cm ; on prendra la feuille de papier millimétré dans le sens de la longueur avec l'axe des ordonnées à 4 cm du bord gauche).

Exercice 2 (spécialité)**5 points**

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a = n^3 - n^2 - 12n \quad \text{et} \quad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

- Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.
- On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β .
 - Établir une relation entre α et β indépendante de n .
 - Démontrer que d est un diviseur de 5.
 - Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
- Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
- Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n , le PGCD de a et b .
 - Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Problème**10 points**

Le but du problème est l'étude simultanée de deux fonctions f et g (**partie A**), utilisées ensuite pour déterminer une valeur approchée d'un certain nombre réel noté C .

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) ; (unité graphique : 2 cm).

Partie A :

Soient les fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x - e^x \quad \text{et} \quad g(x) = (1 - x)e^x.$$

On appelle (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') leurs courbes représentatives respectives

- Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (\mathcal{C}) .
 - Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g , sur l'ensemble des nombres réels.
- Pour tout réel x , on pose $h(x) = f(x) - g(x)$.
 - Montrer que, pour tout réel x , $h'(x) = 1 - g(x)$.
 - En déduire le sens de variations de la fonction h sur l'ensemble des nombres réels.
 - Démontrer que les courbe (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') admettent un unique point d'intersection, dont l'abscisse notée α , appartient à l'intervalle $[1 ; 2]$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .
 - Étudier, suivant les valeurs de x , la position relative de (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') .
- Traver la droite (Δ) et les courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') .
- Pour tout réel x , on pose $\theta(x) = \int_0^x h(t) dt$.

- a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\theta(x)$.
- b. En déduire, sous la forme d'une expression rationnelle en α , l'aire en cm^2 du domaine limité sur le graphique par les courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. À l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de S_{20} d'amplitude 10^{-3} .
2. a. En utilisant le tableau de variations de la fonction g définie dans la **partie A**, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; 1[$,

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

- b. En déduire que, pour tout nombre entier $k \geq 2$, $e^{\frac{1}{k}} \leq \frac{k}{k-1}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$.
- c. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, calculer $S_n - S_{n-1}$. En déduire que la suite (S_n) est décroissante.

3. Pour tout entier $n > 20$, on pose $u_n = S_{20} - S_n$.

- a. Vérifier que pour tout entier $n > 20$, $u_n \geq 0$.
- b. En utilisant le tableau de variations de la fonction f définie dans la **partie A**, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; 1]$, $1+x \leq e^x$.
- c. En déduire que pour tout nombre entier $k \geq 1$, $\frac{k+1}{k} \leq e^{\frac{1}{k}}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geq 1$, $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.
- d. Vérifier que, pour tout entier naturel $n > 20$,

$$u_n = \ln\left(\frac{n}{20}\right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

En raisonnant par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel $n > 20$,

$$\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) \leq \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

- e. En déduire que, pour tout entier naturel $n > 20$,

$$u_n = \ln\left(\frac{21}{20}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

puis que, pour tout entier naturel $n > 20$, $u_n \leq 0,049$.

4. On admet que la suite (S_n) est convergente de limite notée C .

- a. Justifier l'encadrement $S_{20} - 0,049 \leq C \leq S_{20}$.
- b. Déterminer un encadrement de C d'amplitude $0,05$.