Baccalauréat S Liban juin 2000

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.
Dans les questions **1** et **2** on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.
Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les évènements suivants :
A « Les trois boules sont rouges. »
B « Les trois boules sont de la même couleur. »
C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

a. Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

b. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :
D « Tirer deux boules rouges. »
E « Tirer deux boules de la même couleur. »

a. Montrer que la probabilité de l'événement D est

$$p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

b. Calculer la probabilité de l'évènement E, $p(E)$ en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geqslant \frac{1}{2}$?

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-$ i.
Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distincte de $-$ i associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1+\text{i}z}{z+\text{i}}.$$

1. Quelle est l'image par l'application f du point O ?

2. Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1+i$?

3. Montrer que l'équation $\frac{1+\text{i}z}{z+\text{i}} = z$ admet deux solutions que l'on déterminera.

4. Vérifier que $z' = \frac{\text{i}(z-\text{i}i)}{z+\text{i}}$, en déduire $\text{O}M' = \frac{\text{A}M}{\text{B}M}$ et :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\text{B}}, \overrightarrow{M\text{A}}\right) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

5. Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situées sur un même cercle $(\mathscr{C})$ que l'on précisera.

6. Soit M un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et de B, montrer que son image M' est située sur l'axe des abscisses.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

1. Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1+\mathrm{i}$; $b = -4-\mathrm{i}$. Soit f la transformation du plan $(\mathscr{P})$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}M'} = 2\overrightarrow{\mathrm{A}M} + \overrightarrow{\mathrm{B}M}$.
   - **a.** Exprimer z' en fonction de z.
   - **b.** Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leqslant x \leqslant 8$ et $1 \leqslant y \leqslant 8$.
   Les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de M' sont alors : $x' = 3x+2$ et $y' = 3y-1$.
   - **a.** On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.
   - **b.** Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.
   - **c.** Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x'\ ;\ y')$ de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.
   - **d.** Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?
   - **e.** En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x'\ ;\ y')$ qui conviennent. En déduire les couples $(x\ ;\ y)$ correspondant aux couples $(x'\ ;\ y')$ trouvés.

Problème **11 points**

★ Partie A - Préliminaires

1. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$g(t) = \mathrm{e}^t - t - 1.$$
   Quel est le minimum de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$?
2. En déduire les inégalités suivantes :
   - **a.** Pour tout réel t, $\mathrm{e}^t \geqslant t+1$, $\mathrm{e}^t > t$ et $-t\mathrm{e}^{-t} > -1$.
   - **b.** Pour tout réel t tel que $t > -1$, $\ln(1+t) \leqslant t$.
3. En déduire que pour tout réel x, $\ln(1 - x\mathrm{e}^{-x}) < -x\mathrm{e}^{-x}$.

★ Partie B - Étude d'une fonction

On considère lafonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^2 - 2\ln\left(\mathrm{e}^x - x\right).$$

1. Montrer que $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - x\mathrm{e}^{-x})$. Quelle est la limite de f en $+\infty$? On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(\mathrm{e}^x - x - 1)}{\mathrm{e}^x - x}$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   Dans un repère orthonormal (unité : 3 cm), on considère la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation $y = x^2 - 2x$ et $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f. Montrer que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$ sont asymptotes en $+\infty$. Étudier les positions relatives des courbes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$.
3. Donner une équation de chacune des tangentes $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ respectivement aux courbes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisse 0.

4. Tracer dans un même repère les courbes ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{C}$) et leurs tangentes ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}'$) .

★ Partie C - Étude d'une intégrale

1. Soit n un entier naturel, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

a. Démontrer que la suite u de terme général u_n est croissante.

b. Calculer u_n à l'aide d'une intégration par parties.

c. Déterminer la limite de la suite u_n .

2. L'aire du domaine (en unités d'aire) limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = n$, la parabole ($\mathscr{P}$) et la courbe ($\mathscr{C}$) est définie par

$$I_n = -2\int_0^n \ln\left(1 - x\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$$

a. Montrer en utilisant la question 3) des préliminaires que $I_n \geqslant 2u_n$.

b. On admet que la suite (I_n) a pour limite l . Montrer que : $l \geqslant 2$.