Baccalauréat S Polynésie juin 2000

EXERCICE 1 5 points

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm. Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de -2, associe

$$Z = f(z) = \frac{z-2+\text{i}}{z+2\text{i}}.$$

1. Si $z = x + \text{i}y$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.

On vérifiera que $\Re(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$.

En déduire la nature de :

a. l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;

b. l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.

c. Représenter ces deux ensembles.

2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - \text{i}$ et $z_B = -2\text{i}$.

En remarquant que $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.

3. Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2\text{i}|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

EXERCICE 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

4 jetons blancs marqués 0 ;

3 jetons rouges marqués 7 ;

2 jetons blancs marqués 2 ;

1 jeton rouge marqué 5.

1. On tire simultanément 4 jetons du sac.

Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :

A : « Les quatre numéros sont identiques ».

B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».

C : « Tous les jetons sont blancs ».

D : « Tous les jetons sont de la même couleur ».

E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».

a. Montrer que la probabilité de l'évènement B, est $\dfrac{4}{105}$.

b. Calculer la probabilité des évènements A, C, D, E.

c. On suppose que l'évènement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement B.

On établit la règle de jeu suivante :

– Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.

– Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F.

– Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.

– Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F.
Pour tous les autres tirages, il perd 5 F.
G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G.

EXERCICE 2 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation
(1) $ax + by = 60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

a. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution $(x_0~;~y_0)$. Montrer que d divise 60.

b. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0~;~y_0)$ à l'équation (1).

2. On considère l'équation : (2) $24x + 36y = 60$. (x et y entiers relatifs).

a. Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).

b. Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. On appellera S l'ensemble des couples $(x~;~y)$ solutions.

c. Énumérer tous les couples $(x~;~y)$ solutions de (2) et tels que :

$$-10 \leqslant x \leqslant 10.$$

Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées $(x~;~y)$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+3t\\ y &=& 1-2t\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

e. Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions $(x;y)$ de l'équation (2) appartiennent à E.
Comment peut-on caractériser S ?

PROBLÈME 10 points

Partie A

On considère la fonction numérique f, de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \text{e}^{-x}\sin x.$$

On appelle $(\mathcal{C}_f)$ la courbe d' équation $y = f(x)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
On prendra 2 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées, et 6 cm pour π unités sur l'axe des abscisses.

1. Montrer que, pour tout réel x, $-\,\text{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \text{e}^{-x}$.
En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et l'existence d'une asymptote pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2. Montrer que la fonction dérivée de f vérifie :
$f'(x) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, pour x élément de $\mathbb{R}$.

3. On étudie la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.
Recopier et compléter le tableau suivant :

x	$-\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ π
$x + \dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$
Signe de $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$	

En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.

4. Représenter la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ ainsi que les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations $y = -\mathrm{e}^{-x}$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$.

5. Déterminer algébriquement sur $\mathbb{R}$, puis sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$, les coordonnées des points communs à :
   a. $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses.
   b. $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_1)$.
   c. $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

6. Déterminer un réel α tel que, pour $x \geqslant \alpha$, on ait $|f(x)| \leqslant 10^{-2}$.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. En calculant les dérivées successives de la fonction f jusqu'à l'ordre 4 (on rappelle que $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$), trouver une relation entre la fonction f et sa dérivée d'ordre 4 notée $f^{(4)}$.

2. En déduire qu'on peut choisir $F(x) = -\dfrac{1}{4}f^{(3)}(x)$.

3. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I = \dfrac{\mathrm{e}+1}{2}$.

Partie C

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que $I_0 = I$ et interpréter I_0 comme l'aire d'un domaine plan. Hachurer ce domaine.

2. Montrer que, pour tout naturel n, $I_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{2}\left(\mathrm{e}^{-\pi} + 1\right)$.

3. Prouver que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
Calculer sa raison.

4. Prouver que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.