Baccalauréat S Amérique du Sud décembre 2001

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (unité graphique : 2 cm). On considère la courbe $\mathcal{C}$ dont une représentation pararnétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lll} x = f(t) & \text{où} & f(t) = 2\left(\cos^2 t + \cos t - 1\right) \\ y = g(t) & \text{où} & g(t) = \sin^3 t + \sin t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in [-\pi\ ;\ \pi]$$

On appelle $M(t)$ le point de la courbe $\mathcal{C}$ défini par la valeur t du paramètre.

1. **a.** Étudier les positions relatives de $M(t)$ et $M(-t)$.

   b. Expliquer pourquoi il suffit alors, pour tracer $\mathcal{C}$, d'étudier f et g sur $[0\,;\,\pi]$.

   Soit $\mathcal{C}'$ la partie de $\mathcal{C}$ correspondante.

2. **a.** Montrer que $f'(t) = -2\sin t(2\cos t + 1)$. Étudier le signe de f' sur $[0\,;\,\pi]$.

   b. Montrer que $g'(t) = \cos t\left(3\sin^2 t + 1\right)$. Étudier le signe de g' sur $[0\,;\,\pi]$.

   c. Dans un même tableau, faire figurer les variations de f et de g sur $[0\,;\,\pi]$.

3. On veut déterminer l'intersection de $\mathcal{C}'$ et de l'axe des ordonnées.

   a. A l'aide du **2.** montrer que l'équation $f(t) = 0$ a une unique solution dans $[0\,;\,\pi]$.

   Soit t_0 celle solution.

   b. Donner une valeur approchée de t_0 à 10^{-1} près par défaut.

   c. Déterminer une valeur approchée de $g(t_0)$.

4. Placer les points $M(0)$, $M(t_0)$, $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $M(\pi)$.

   Construire les tangentes à $\mathcal{C}'$ parallèles aux axes de coordonnées. Tracer $\mathcal{C}'$ puis en déduire la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2 **6 points** (d'après Nathan)

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{3u_n + 4} \end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que (u_n) est majorée par 4.

   b. Montrer que (u_n) est strictement croissante.

   c. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

   b. Retrouver le résultat du **1 c**.

   c. Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = n^2(4 - u_n).$$

EXERCICE 2 **4 points**

Candidats n'ayant pas pris l'enseignement de spécialité

On considère l'ensemble E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Avec deux chiffres distincts x et y de E on crée un unique domino simple noté indifféremment $\boxed{x \mid y}$ ou $\boxed{y \mid x}$.

Avec un chiffre z de E, on forme un unique domino double noté $\boxed{z \mid z}$.

1. Montrer que l'on peut ainsi créer 36 dominos.

2. On tire au hasard un domino.

  a. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?

  b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?

3. On tire au hasard et simultanément deux dominos.

Un élève affirme : « la probabilité d'obtenir un domino double et un domino simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est égale à $\dfrac{4}{45}$ ».

Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée*).

EXERCICE 2 **4 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel non nul.

On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que $2n + 1$ divise a et b.

2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n + 1$.

Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

PROBLÈME **10 points.**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-2x}$$

et sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Partie A : étude de la fonction f

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?

  b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

3. Dresser le tableau de variations de f.

4. **a.** Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

  b. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : étude d'une tangente

1. On rappelle que f'' désigne la dérivée seconde de f.

  a. Montrer que, pour tout x réel, $f''(x) = 4(2x - 1)\mathrm{e}^{-2x}$.

  b. Résoudre l'équation $f''(x) = 0$.

2. Soit B le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ de la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en B.

3. On veut étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T : pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{\mathrm{e}}x + \frac{3}{\mathrm{e}}\right).$$

   a. Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.

   b. Étudier le signe de $g''(x)$ suivant les valeurs de x.
   En déduire le sens de variations de g' sur $\mathbb{R}$.

   c. En déduire le signe de $g'(x)$ puis le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

   d. Déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. Que peut-on en conclure sur la position relative de $\mathscr{C}$ et T ?

4. Dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ placer les points A et B puis tracer la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : calculs d'aire et de volume

1. Soit λ un réel strictement positif.
On note A(λ), l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \lambda$.

   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer A(λ) en fonction de λ.

   b. Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathrm{A}(\lambda)$.

2. **a.** On considère les fonctions h et H définies sur $\mathbb{R}$ respectivenient par :

$$h(x) = (2x+1)^2\mathrm{e}^{-4x} \qquad \text{et} \qquad H(x) = \left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right)\mathrm{e}^{-4x}.$$

   Montrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

   b. On considère le domaine E limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $= -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$.
   On note V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de E autour de l'axe des abscisses.
   On rappelle que V, en unités de volume, est exprimé par $\mathrm{V} = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$.
   Déterminer la valeur exacte de V en unités de volume puis une valeur approchée de V à 10^{-3} près.