∽ Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les trois points A (2 ; 0 ; 0), B (1 ; 1 ; 0) et C (3 ; 2 ; 6). (D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (0 ; 1 ; 1) et (Δ) la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}$ (1 ; - 2 ; 2).

1. Écrire une représentation paramétrique de chacune des droites (D) et (,à) puis montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ (question hors programme en 2002), puis écrire une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soit H le projeté orthogonal du point F(2 ; 4 ; 4) sur le plan (ABC).
   - **a.** Expliquer pourquoi il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{FH} = k\vec{w}$.
   - **b.** Déterminer la valeur de k et en déduire les coordonnées de H.
   - **c.** Calculer le volume du tétraèdre FABC.

Exercice 2 **4 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. Calculer $P\left(\text{i}\sqrt{3}\right)$ et $P\left(-\text{i}\sqrt{3}\right)$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = \left(z^2+3\right)Q(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = \text{i}\sqrt{3}$, $z_B = -\text{i}\sqrt{3}$, $z_C = 3 + 2\text{i}\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.
4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \text{e}^{\frac{-\text{i}\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

EXERCICE 2 **4 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
   - **a.** Vérifier, en utilisant par exemple la question **1)**, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0\ ;\ y_0)$ de (E).
   - **b.** Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
   - **c.** *Application* : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.
     Indication : On remarquera que le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple $(x\ ;\ y)$ vérifie l'équation (E).

PROBLÈME **12 points**

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie **A** la fonction numérique f définie sur $]0~;+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2},$$

de déterminer ensuite dans la partie **B.** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie **C.**, cette dernière partie étant, dans une large mesure, indépendante des deux autres.

Partie A

1. Soit g la fonction numérique définie sur $]0~;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1.$$

   a. Montrer que la fonction g est dérivable et que, pour tout $x \in]0~;~+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}.$$

   b. Étudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

2. **a.** Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   b. Montrer que, pour tout $x \in]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ puis donner le tableau de variation de f.

Partie B

(Γ) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm.

1. Soit h la fonction définie sur $]0~;+\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.

   a. Étudier le sens de variation de h, puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0{,}4~;~0{,}7]$.

   b. Montrer que l'on a : $\text{e}^{-\alpha} = \alpha$.

2. **a.** Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$.

   b. Utiliser les résultats de la question **1 a** pour déterminer les positions relatives de (Γ) et (Δ).

3. Construire (Γ) et (Δ) dans le repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

4. **a.** Calculer, au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale I

$$\text{I} = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2}\,\text{d}t.$$

   b. En déduire l'aire, en cm^2, de la portion de plan limitée par la courbe (Γ), la droite (Δ) et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Partie C

Étude d'une suite (hors-programarne en 2002)

Dans cette partie :

* I désigne l'intervalle $[0{,}4~;~0{,}7]$;
* α est le réel mis en évidence au **B 1** ;
* φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \text{e}^{-x}$;

* u est la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 & = & 0,4 \\ u_{n+1} & = & \varphi(u_n) \end{cases}$

1. Montrer qu'on a, pour tout $x \in I$.

a. $\varphi(x) \in \text{I}$.

b. $|\varphi'(x)| \leqslant 0,7$.

c. $|\varphi(x) - \alpha| \leqslant 0,7|x - \alpha|$.

2. **a.** Montrer qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,7|u_n - \alpha|$, puis en déduire par récurrence qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leqslant 0,3 \times (0,7)^n.$$

b. Conclure alors quant à la convergence de la suite u.

3. Déterminer un entier p tel que, pour $n \geqslant p$, on ait $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$, puis donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.