

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Soit m un nombre réel et f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = m \sin x & \text{pour } x \in [0 ; \pi] \\ f(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer le réel m tel que f soit une densité de probabilité.
2. Représenter f dans un repère orthonormé.
3. Soit X une variable aléatoire dont f est une densité de probabilité.
Définir la fonction de répartition de X puis représenter graphiquement F dans un repère orthonormé.
4. Calculer la probabilité $p\left(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{3\pi}{4}\right)$.
5. Calculer les probabilités $p(X \geq 0)$ et $p(X \leq 0)$.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 + 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$.
Calculer les distances OA, OB et AB.
En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D.
4. On appelle G le barycentre des points pondérés (O ; -1), (D ; 1) et (B ; 1).
 - a. Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$.
 - b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure. (Unité graphique : 1 cm).
 - c. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
5.
 - a. Justifier l'égalité $\frac{c-g}{a-g} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - b. En déduire une mesure en radians de l'angle (\vec{GA}, \vec{GC}) , ainsi que la valeur du rapport $\frac{GC}{GA}$.
Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle AGC ?

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(a+b; ab) = p$, où p est un nombre premier.
 - a. Démontrer que p divise a^2 . (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$.)

- b.** En déduire que p divise a .
On constate donc, de même, que p divise b .
- c.** Démontrer que $\text{PGCD}(a, b) = p$.
- 2.** On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.
- a.** Résoudre le système

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a, b) = 5 \\ \text{PPCM}(a, b) = 170 \end{cases}$$

- b.** En déduire les solutions du système :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a+b, ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a, b) = 170 \end{cases}$$

PROBLÈME

11 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère la fonction f , définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2.$$

On note (\mathcal{C}) sa courbe représentative.

Partie A - Étude de la fonction f et tracé de la courbe (\mathcal{C})

- a.** Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. (On pourra poser $\ln x = X$).
- b.** Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation $f(x) > 0$.
- a.** Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- b.** Calculer $f'(x)$.
- c.** Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
- Déterminer une équation de la tangente (\mathcal{T}) à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.
- On se propose d'étudier la position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à la droite (\mathcal{T}) .

Pour cela, on considère la fonction φ , définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - \left(4e^{-\frac{5}{4}}x - \frac{41}{8} \right).$$

- Montrer que $\varphi'(x) = \frac{4 \ln x - 1}{x} - 4e^{-\frac{5}{4}}$ puis calculer $\varphi''(x)$.
 - Étudier le sens de variation de φ' sur $]0; +\infty[$.
En déduire que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, on a $\varphi'(x) \leq 0$.
 - Calculer $\varphi\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$ déterminer le signe de $\varphi(x)$.
En déduire la position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à la droite (\mathcal{T}) .
- 5.** Tracer la courbe (\mathcal{C}) et la droite (\mathcal{T}) . (Unité graphique : 2 cm).

Partie B - Calcul d'une aire

- Vérifier que la fonction h , définie par $x \mapsto x \ln x - x$, est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0; +\infty[$.

2. On pose $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \ln x \, dx$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 \, dx$.

a. Calculer I_1 .

b. En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_2 = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}$.

c. Calculer $\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} f(x) \, dx$. En déduire l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $\frac{1}{e} \leq x \leq e^{\frac{3}{2}}$ et $f(x) \leq y \leq 0$.