Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un joueur achète 10 euros un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie.

Il gratte une case sur le billet. Il peut alors gagner 100 euros avec une probabilité de $\dfrac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.

G désigne l'évènement : « Le joueur gagne au grattage ».

Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner 100 euros, ou 200 euros, ou bien ne rien gagner.

L_i désigne l'évènement « Le joueur gagne 100 euros à la loterie ».

L_2 désigne l'évènement « Le joueur gagne 200 euros à la loterie ».

P désigne l'évènement : « Le joueur ne gagne rien à la loterie ».

Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 100 euros à la loterie est $\dfrac{1}{70}$, et la probabilité qu'il gagne 200 euros à la loterie est $\dfrac{1}{490}$.

1. **a.** Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.

   b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.

   c. Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

2. On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

   La probabilité de l'évènement « $X = 90$ » est $\dfrac{2}{125}$.

   La probabilité de l'évènement « $X = 190$ » est $\dfrac{1}{250}$.

   a. Montrer que la probabilité que le joueur gagne 100 euros à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage, est égale à $\dfrac{1}{10}$.

   b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage.

   c. Déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par $M(z)$ le point M ayant pour affixe z.

1. Placer sur une figure les points $\text{A}(2+\text{i})$, $\text{B}(2\text{i})$, $\text{C}(-4+3\text{i})$ et $\text{D}(-8)$, en prenant 1 cm pour unité graphique.

2. Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1+2\text{i})z - 4 - 2\text{i}.$$

   a. Préciser les images des points A et B par f.

   b. Montrer que f admet un unique point fixe Ω, dont on précisera l'affixe ω (M est un point fixe pour f si, et seulement si, $f(M) = M$).

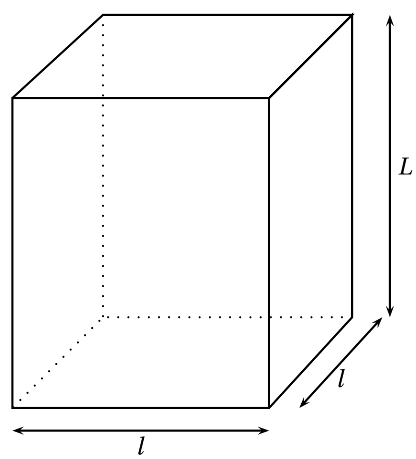
3. On admet que $\omega = 1 - 2\text{i}$. Soit M un point quelconque et M' son image par f.

a. Montrer que, pour tout complexe z on a : $z' - z = 2\mathrm{i}(w - z)$.
Dans toute la suite, M est différent de Ω.

b. Déduire de la question précédente le rapport des distances $\dfrac{MM'}{\Omega M}$, et l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$.

c. Déduire des questions précédentes une construction géométrique du point M', connaissant le point M.
Réaliser cette construction sur la figure de la question **1)**

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

   a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?
   Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

   b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question **1** (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

   a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ?
   Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

   b. Dans cette question, le volume de la boîte B est 15435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.
   Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

⋆ Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x.$$

   a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

   b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u + v$ est solution de (1).

   c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).
3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B

⋆ Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variations.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

   a. Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

   b. L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C

⋆ Étude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
   (On pourra mettre e^{2x} en facteur.)
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
   Étudier le sens de variation de f
3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ où α est défini dans la partie **B**.
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
   (On rappelle que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.)
4. Établir le tableau de variations de f
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie D ⋆ Calcul d'aire

1. Soit m un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale $\displaystyle\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$. (On justifiera la réponse.)
2. a. Calculer $\displaystyle\int_m^0 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, à l'aide d'une intégration par parties.

   b. En déduire $\displaystyle\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Calculer la limite de $\displaystyle\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$, lorsque m tend vers $-\infty$.