Baccalauréat S France septembre 2001

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'évènement « l'urne a est choisie » , B l'évènement « l'urne b est choisie » et R l'évènement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note $p_{\text{A}}(\text{R})$ la probabilité conditionnelle de l'évènement R par rapport à l'évènement A.

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.

a. Déterminer les probabilités suivantes : $p(\text{A})$, $p_{\text{A}}(\text{R})$, $p(\text{A}\cap\text{R})$.

b. Montrer que

$$p(R) = \frac{13}{30}$$

c. Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne a ?

2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $5-n$.

a. Exprimer $p_{\text{A}}(\text{R})$ et $p_{\text{B}}(\text{R})$ en fonction de n.

b. Démontrer que

$$p(\text{R}) = \frac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}.$$

c. On sait que n ne prend que six valeurs entières. Déterminer la répartition possible des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur possible de $p(\text{R})$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ direct.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-\text{i}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}-\{\text{i}\}$ par :

$$f(z) = \frac{1-\text{i}z}{z-\text{i}}.$$

1. Vérifier que pour tout z de $\mathbb{C}-\{\text{i}\}$

$$f(z) = -\text{i}+\frac{2}{z-\text{i}}.$$

2. **a.** Démontrer que - i n'a pas d'antécédent par f.

b. Déterminer les antécédents de 0 et de i par f.

3. À tout point M différent de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z)$.

a. Démontrer que pour tout point M différent de A, le produit des longueurs AM et BM' est égal à 2 $(\text{A}M\cdot\text{B}M' = 2)$.

b. Démontrer que lorsque M décrit le cercle C de centre A et de rayon 4, M' se déplace sur un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.

4. **a.** Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que $z - \mathrm{i}$ soit un nombre réel non nul.

b. Démontrer que lorsque M décrit E, M' se déplace sur une droite Δ que l'on précisera.

c. Lorsque M décrit E, M' décrit-il toute la droite Δ ?

5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur non nul.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Déterminer le PGCD des nombres 168 et 20.

b. Soit l'équation $168x + 20y = 6$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?

c. Soit l'équation $168x + 20y = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?

2. **a.** Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en détaillant les calculs effectués, deux entiers relatifs m et p tels que $42m + 5p = 1$.

b. En déduire deux entiers relatifs u et v tels que $42u + 5v = 2$.

c. Démontrer que le couple d'entiers relatifs $(x~;~y)$ est solution de l'équation $42x + 5y = 2$ si, et seulement si $42(x + 4) = 5(34 - y)$.

d. Déterminer tous les couples d'entiers $(x~;~y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $42x + 5y = 2$.

3. Déduire du **2.** les couples $(x~;~y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = -5$.

Problème **9 points**

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^x.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. **a.** Étudier le sens de variation de f et donner le tableau de variation de f.

b. Tracer $\mathcal{C}$.

3. Soit

$$\mathrm{I} = \int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Interpréter graphiquement I.

b. En utilisant l'intégration par parties, calculer

$$\int_{-3}^{0} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,$$

puis

$$\int_{-3}^{0} x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

c. En déduire la valeur exacte de I.

Partie B

1. Soit a et b deux nombres réels et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{(x^2+ax+b)}.$$

Quelles sont les valeurs de a et de b pour lesquelles le tableau de variations de g est celui donné ci-dessous ?

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^{(x^2-3x+1)}$$

et Γ sa courbe représentative dans le repère $\mathscr{R}$.

a. Démontrer que la droite D d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ est axe de symétrie de Γ.

b. Justifier l'affirmation suivante : « 3,2 est une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution de l'équation $h(x) = 5$ ».

c. Soit α un nombre dont 1,7 est une valeur approchée à 0,5 près. Établir que

$$0,28 \leqslant h(\alpha) \leqslant 0,47.$$

Partie C

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous (a, b et c étant trois nombres réels).

x	$-\infty$	0	a	b	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	c	$\nearrow$ 0	$+\infty$

Soit v_1, v_2, v_3 les fonctions définies par :

$$v_1(x) = \mathrm{e}^{u(x)} \qquad v_2(x) = u\left(\mathrm{e}^x\right) \qquad v_3(x) = u(x)\mathrm{e}^x.$$

1. Déterminer le sens de variation des fonctions v_1 et v_2 (en justifiant votre réponse).

2. Indiquer un intervalle sur lequel il est possible de donner le sens de variation de la fonction v_3 (en justifiant votre réponse).