∽ Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 2001 ∽

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie I

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1\,;\,0\,;\,2),\quad (3\,;\,2\,;\,-4),\quad (1\,;\,-4\,;\,2),\quad (5\,;\,-2\,;\,4).$$

On considère les points I, J et K définis par : I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD] et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. a. Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.
   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :
   $$8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées.
   d. Montrer que :
   $$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

Partie II

Plus généralement, dans l'espace E, on considère un tétraèdre ABCD ainsi que les points I, J, K et L définis par I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD].

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

Soit G le barycentre de (A, 3), (B, 3), (C, 1), D, 1).

1. Déterminer les barycentres de (A, 3), (D, 1) et le barycentre de (B, 3), (C, 1).
2. En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL). En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 4 cm. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Soit A le point d'affixe $z_A = -\text{i}$ et B le point d'affixe $z_B = -2\text{i}$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, M distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{\text{i}z - 2}{z + \text{i}}$.

1. Démontrer que, si z est un imaginaire pur, $z \neq -\text{i}$, alors z' est imaginaire pur.
2. Déterminer les points invariants par l'application f.

3. Calculer $\left|z' - \text{i}\right| \times |z + \text{i}|$.
Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
4. **a.** Développer $(z + \text{i})^2$, puis factoriser $z^2 + 2\text{i}z - 2$.
   b. Déterminer et repréenter l'ensemble des points M, tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.
5. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M, tels que le module de z' soit égal à 1.
$\left(\text{On pourra remarquer que } z' = \dfrac{\text{i}\,(z - z_\text{B})}{z - z_\text{A}}.\right)$

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = \left(x^2 + 2\right)^2 - 4x^2$.
2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
   a. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
   b. Montrer que d divise n.
   c. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
   a. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.
   b. Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.
   c. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question **4**)

Problème **5 points**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \left(x^2 + 4x + 3\right)\text{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; l'unité graphique est 2 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ et $(3 - x^2)$ ont le même signe.
3. En déduire le tableau de variations de g.
4. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. Vérifier que $g(0) = 0$. On note α la solution non nulle.

   b. Prouver que $-2,4 < \alpha < -2,3$.
5. En déduire le signe $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B - Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$, est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
4. **a.** Montrer que la droite (D)et la courbe $(\mathscr{C})$ se coupent en deux points A et B dont on donnera les coordonnées.

   b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$.
5. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

Partie C - Calculs d'aire

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$H(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction H soit une primitive de la fonction h définie par :

   $$h(x) = \left(x^2 + 4x + 3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

2. déterminer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).
3. Soit m un réel strictement supérieur à $--1$. On considère le domaine $(\mathscr{D}_m)$ délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = m$.

   a. Calculer l'aire $(\mathscr{A}_m)$ du domaine $(\mathscr{D}_m)$, en unités d'aire.

   b. Déterminer la limite de $(\mathscr{A}_m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.