Baccalauréat S Polynésie septembre 2001

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout naturel $n \geqslant 1$ on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
2. Démontrer que pour tout naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

3. En déduire par récurrence que pour tout naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$\sqrt{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!} + I_n.$$

4. Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n n!}\mathrm{A}.$$

On pourra déterminer A en majorant la fonction :

$$t \longmapsto (1-t)^n \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \quad \text{sur l'intervalle } [0\,;\,1]$$

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}.$$

Exercice 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{C}} = -1+\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{D}} = 1+\mathrm{i}.$$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit la fonction f de $\mathscr{P}$ - {B} dans $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' où

$$z' = \mathrm{i}\frac{z-2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}.$$

   a. Développer $(z+1-\mathrm{i})(z-1-\mathrm{i})$.

   b. Chercher les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2. a. Montrer que, pour tout z différent de i,

$$|z'| = \frac{\mathrm{A}M}{\mathrm{B}M},$$

et que, pour tout z différent de i et de 2i,

$$\arg\left(z'\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{B}M},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo} 2\pi).$$

b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $\arg(z') = \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

3. **a.** Démontrer que $z' - \mathrm{i} = \frac{1}{z - \mathrm{i}}$ et en déduire que $|z' - \mathrm{i}| \times |z - \mathrm{i}| = 1$, pour tout complexe z différent de i.

b. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$. Prouver que le point M' d'affixe z' appartient à un cercle de centre B et de rayon à déterminer.

Exercice 2 **4 points**

Enseignement de spécialité

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm, on considère les points B, D définis par : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\vec{v}$ et C tel que ABCD soit un rectangle.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$. Déterminer l'affixe z_{E} de E.
2. Déterminer les nombres réels $a,\ b$ tels que le point F d'affixe $z_{\mathrm{F}} = 6 - \mathrm{i}$ soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients $a,\ b$ et 1.
3. On considère la similitude s qui transforme A en E et B en F. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', image de M par s.

   a. Exprimer z' en fonction de z.

   b. Déterminer le centre I, l'angle et le rapport de la similitude s.

   c. Déterminer les images de C et de D par s.

   d. Calculer l'aire de l'image par s du rectangle ABCD.

4. **a.** Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan tels que :

$$\left\|6\overrightarrow{M\mathrm{A}} - 10\overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\| = 9.$$

   b. Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de Ω par s.

Problème **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 + \cos x)\mathrm{e}^{1-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.
2. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos x\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

   b. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.

   c. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{1-x}$.

   b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

4. a. Montrer que, sur l'intervalle $[0 ; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0 ; 4]$.

Partie B

On veut calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1. Montrer que : $\mathscr{A} = 2e - 2 + \displaystyle\int_0^1 \cos t e^{1-t}\,dt$.

2. On pose : $I = \displaystyle\int_0^1 \cos t e^{1-t}\,dt$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \sin t e^{1-t}\,dt$.

   a. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$I = -\cos 1 + e - J \quad \text{et} \quad J = -\sin 1 + I.$$

   b. En déduire la valeur de I.

3. Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ si à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

1. a. Montrer que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.

2. a. Déterminer $\ln[f(x)]$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   b. Étudier le sens de variations de la fonction H.

   c. Déterminer le tableau de variations de H.

3. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. (On ne demande pas de représenter Γ.) On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

   a. Étudier la position relative de Γ et de Δ.

   b. Déterminer les abscisses des points communs à Γ et Δ.

4. a. Établir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

   b. Étudier la position relative de Γ et T.

5. Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.