

## Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2002

### EXERCICE 1

**5 points**

#### Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte deux parties qui peuvent être traitées de manière indépendante.

#### Partie I

1. Dans un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.), pour une question donnée, 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte.

Un candidat décide de répondre au hasard à cette question.

La réponse exacte rapporte  $n$  point(s) et une réponse fausse fait perdre  $p$  point(s).

Soit  $N$  la variable aléatoire qui associe, à la réponse donnée par le candidat, la note algébrique qui lui sera attribuée pour cette question.

- a. Donner la loi de probabilité de  $N$ .
  - b. Quelle relation doit exister entre  $n$  et  $p$  pour que l'espérance mathématique de  $N$  soit nulle?
2. À un concours un candidat doit répondre à un Q.C.M. de 4 questions comportant chacune trois propositions de réponse dont une seule est exacte. On suppose qu'il répond à chaque question, au hasard. Calculer la probabilité qu'il réponde correctement à 3 questions exactement (donner cette probabilité sous forme de fraction irréductible puis sa valeur arrondie au centième).

#### Partie II

Répondre au Q.C.M. proposé sur la feuille annexe (à rendre avec la copie).

#### Document à rendre avec la copie

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Il est seulement demandé d'entourer la réponse choisie pour chacune des quatre questions.

L'absence de réponse à une question ne sera pas pénalisée.

- a. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un « paquet ». Combien de « paquets » contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
180	330	110

- b. A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que :

$$p(A) = 0,4 \quad p(B) = 0,5 \quad p(\overline{A \cup B}) = 0,35.$$

Combien vaut  $p(A \cap B)$  ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$p(A \cap B) = 0,1$	$p(A \cap B) = 0,25$	Les données sont insuffisantes pour répondre.

- c. A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que

$p(B \cap A) = \frac{1}{6}$ ,  $p_A(B) = 0,25$  (probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé). Combien vaut  $p(A)$  ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$p(A) = \frac{2}{3}$	$p(A) = \frac{1}{24}$	$p(A) = \frac{1}{12}$

- d. Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité :

$x_i$	1	2	4
$p_i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Combien vaut l'écart type de X ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$\sigma = \frac{3}{2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sigma = 2$

### EXERCICE 2

5 points

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1+i)z + 2.$$

1. Soit A le point d'affixe  $-2 + 2i$ .

Déterminer les affixes des points A' et B vérifiant respectivement  $A' = F(A)$  et  $F(B) = A$ .

2. Méthode de construction de l'image de M.

a. Montrer qu'il existe un point confondu avec son image. On notera  $\Omega$  ce point et  $\omega$  son affixe.

b. Établir que pour tout complexe z distinct de  $\omega$ ,  $\frac{z' - z}{\omega - z} = -i$ .

Soit M un point distinct de  $\Omega$ .

Comparer  $MM'$  et  $M\Omega$  et déterminer une mesure de l'angle  $(\vec{M\Omega}, \vec{MM'})$ .  
En déduire une méthode de construction de M' à partir de M.

3. Étude de l'image d'un ensemble de points.

a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble  $\Gamma$ , des points du plan dont l'affixe z vérifie  $|z + 2 - 2i| = \sqrt{2}$ .

Vérifier que B est un point de  $\Gamma$ .

b. Démontrer que, pour tout z élément de  $\mathbb{C}$

$$z' + 2 = (1+i)(z + 2 - 2i).$$

Démontrer que l'image par F de tout point de  $\Gamma$  appartient au cercle  $\Gamma'$  de centre A' et de rayon 2.

Placer O, A, B, A',  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sur une même figure.

### EXERCICE 2

5 points

#### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme  $\overline{abba}$  où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.

Exemples d'éléments de (E) : 2 002 ; 3 773 ; 9 119. Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

#### Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. a. Décomposer 1 001 en produit de facteurs premiers.

- b. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.
2. a. Quel est le nombre d'éléments de (E) ?  
 b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?
3. Soit  $n$  un élément de (E) s'écrivant sous la forme  $\overline{abba}$ .  
 a. Montrer que : «  $n$  est divisible par 3 » équivaut à «  $a + b$  est divisible par 3 ».  
 b. Montrer que : «  $n$  est divisible par 7 » équivaut à «  $b$  est divisible par 7 ».
4. Dédurre des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

**Partie B : Étude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.**

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile. On admet que pour tout élément  $n$  de (F), il existe des entiers naturels  $p$  et  $q$  tels que :

$$n = 2\,000 + 4p \quad \text{et} \quad n = 2\,002 + 11q.$$

1. On considère l'équation (e) :  $4p - 11q = 2$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers relatifs. Vérifier que le couple (6, 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).
2. En déduire que tout entier  $n$  de (F) peut s'écrire sous la forme  $2\,024 + 44k$  où  $k$  est un entier relatif.
3. À l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).  
 N.B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 :  
 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

**PROBLÈME**

**10 points**

**Commun à tous les candidats**

Pour tout réel  $k$  strictement positif, on considère la fonction  $f_k$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x.$$

Soit  $\mathcal{C}_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

**Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = \ln(1 + x) - x.$$

1. Étudier le sens de variation de  $g$ .  
 2. En déduire que pour tout réel  $a$  positif ou nul  $\ln(1 + a) \leq a$ .

**Partie A : Étude de la fonction  $f_1$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$ .**

1. Calculer  $f_1'(x)$  pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  et en déduire le sens de variation de la fonction  $f_1$ .  
 2. Montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,  
 $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$ . En déduire la limite de  $f_1$  en  $+\infty$ .  
 3. Dresser le tableau de variation de  $f_1$ .

**Partie B : Étude et propriétés des fonctions  $f_k$ .**

1. Calculer  $f_k(x)$  pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$  et en déduire le sens de variation de la fonction  $f_k$ .
2. Montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  
 $f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$ . En déduire la limite de  $f_k$ , en  $+\infty$ .
3.    **a.** Dresser le tableau de variation de  $f_k$ .  
       **b.** Montrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ , on a  $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$ .
4. Déterminer une équation de la tangente  $T_k$  à  $\mathcal{C}_k$  au point O.
5. Soit  $p$  et  $m$  deux réels strictement positifs tels que  $p < m$ . Étudier la position relative de  $\mathcal{C}_p$  et  $\mathcal{C}_m$ .
6. Tracer les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  ainsi que leurs tangentes respectives  $T_1$  et  $T_2$  en O.

**Partie C : Majoration d'une intégrale.**

Soit  $\lambda$  un réel strictement positif, on note  $\mathcal{A}(\lambda)$  l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}_k$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = \lambda$ .

1. Sans calculer  $\mathcal{A}(\lambda)$ , montrer que  $\mathcal{A}(\lambda) \leq k \int_0^\lambda xe^{-x} dx$  (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale  $\int_0^\lambda xe^{-x} dx$ .
3. On admet que  $\mathcal{A}(\lambda)$  admet une limite en  $+\infty$ .  
 Montrer que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) \leq k$ .  
 Interpréter graphiquement ce résultat