∽ Baccalauréat S Amérique du Sud ∾
décembre 2002

Exercice 1 **5 points**

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ on appelle A et B les points d'affixes respectives 2 et - 2. À tout point M d'affixe z, z différent de 2, on associe le point N d'affixe $\overline{z}$ et M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{2z-4}{\overline{z}-2}$$

1. Calculer z' et $|\overline{z'}|$ lorsque $z = 5$ puis lorsque $z = 1 + \text{i}$.
2.
   a. Interpréter géométriquement $|z-2|$ et $|\overline{z'}-2|$.

   b. Montrer que, pour tout z distinct de 2, $|z'| = 2$. En déduire une information sur la position de M'.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z $(z \neq 2)$ tels que $M' = \text{B}$.
4. On note $Z_{\overrightarrow{\text{A}M}}$ et $Z_{\overrightarrow{\text{B}M'}}$, les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\text{A}M}$ et $\overrightarrow{\text{B}M'}$.

   Montrer que, pour tout point M distinct de A et n'appartenant pas $\mathcal{E}$, le quotient $\dfrac{Z_{\overrightarrow{\text{A}M}}}{Z_{\overrightarrow{\text{B}M'}}}$ est un nombre réel. Interpréter géométriquement ce résultat.
5. Un point M distinct de A, n'appartenant pas $\mathcal{E}$, étant donné, proposer une méthode géométrique pour construire le point M'. On illustrera par une figure.

Exercice 2 **5 points**

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111\ldots11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1). On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.
2. On considère la division euclidienne par 2,001 : expliquer pourquoi parmi les 2,002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.

   Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste $(n < p)$.

   Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2,001 ?
3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.

   Démontrer l'égalité $a_m - a_n = a_{m-n} \times 10^k$.
4. Calculer le PGCD de 2,001 et de 10.

   Montrer que si 2,001 divise $a_m - a_k$, alors 2,001 divise a_{m-k}.
5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2,001.

a. Montrer que la probabilité de l'évènement la 3$^{\text{e}}$ boule tirée est noire vaut $\frac{1}{4}$.

b. Certains pensent que l'évènement la première boule tirée est noire a une probabilité supérieure à l'évènement la troisième boule tirée est noire . Est-ce vrai ? Justifier.

PROBLÈME **10 points**

A. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \text{e}^{x}(1 - x) + 1.$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle [1,27 ; 1,28] ; on note α cette solution.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

   Justifier que $g(x) > 0$ sur $[0\ ;\ \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

B. Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\text{e}^{x}+1} + 2$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interprter graphiquement ce résultat.
2.
   a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote pour $\mathscr{C}_f$.

   c. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (d).
3.
   a. Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la partie **A)**.

   b. Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α.

C. Encadrements d'aires

Pour tout entier naturel n, tel que $n \geqslant 2$, on note $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des points $M(x,\ y)$ du plan , dont les coordonnées vérifient : $2 \leqslant x \leqslant n$ et $2 \leqslant n \leqslant f(x)$ et on appelle $\mathscr{A}_n$ son aire, exprimée en unités d'aire.

1. Faire apparaître $\mathscr{D}_5$ sur la figure.

2. Démontrer que pour tout x , tel que $x \geqslant 2$, on a :

$$\frac{7}{8} x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1} \leqslant x\mathrm{e}^{-x}.$$

3. On pose $I_n = \displaystyle\int_2^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.

4. Écrire un encadrement de $\mathscr{A}_n$ en fonction de I_n.

5. On admet que $\mathscr{A}_n$ a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Que peut-on en déduire pour la limite de $\mathscr{A}_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Donner une interprétation géométrique de ce dernier rsultat.