Baccalauréat série S Antilles-Guyane juin 2003

Exercice 1 **4 points**

Commun tous les candidats

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité graphique : 2 cm). On considère les points A et B d'affixes respectives $A(3+2i)$ et $B(-1+4i)$. Extérieurement au triangle OAB, on construit les deux carrés OA_1A_2A et OBB_1B_2.

1. **a.** En remarquant que A_2 est l'image de O par une rotation de centre A, déterminer l'affixe de A_2. En déduire l'affixe du centre I du carré OA_1A_2A.

   b. En remarquant que B_1 est l'image de O par une rotation de centre B, déterminer l'affixe de B_1. En déduire l'affixe du centre J du carré OBB_1B_2.

2. Calculer l'affixe du milieu K du segment [AB]. À l'aide des affixes des différents points, calculer les longueurs KI et KJ, ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ}\right)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,049 4.

2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

   a. Définir la loi de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre ?

3. **a.** Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.

   Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

   b. Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

4. La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,000 7, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0{,}000\ 7\mathrm{e}^{-0{,}000\ 7x}.$$

   Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.

   b. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a et b les entiers naturels tels que :

$$\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}.$$

   Que valent a_1 et b_1 ?

   D'après les calculs de la question **1) a)**, donner d'autres valeurs de a_n et b_n.

   a. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

   b. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.

   En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

   c. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

   En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Problème **11 points**

A. On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :
$y' - 2y = 2\left(e^{2x} - 1\right)$.

1. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2xe^{2x} + 1$$

   est solution de l'équation différentielle (E).

2. On pose : $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).

3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0. Elle sera appelée g et étudiée dans la **partie B**.

▷B. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1.$$

1. Déterminer le sens de variation de g. Présenter son tableau de variations. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - g(x) \geqslant 0$.

   b. Calculer l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

   c. Interpréter graphiquement les résultats des questions **a.** et **b.**.

C. On considère la fonction numérique f définie pour x réel non nul par :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}.$$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.

2. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on précisera.
3. Déterminer le sens de variation de f et donner son tableau de variations (on pourra utiliser la **partie B)**.
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, avec pour units : 4 cm sur $\left(O\,;\,\vec{\imath}\right)$ et 2 cm sur $\left(O\,;\,\vec{\jmath}\right)$. Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous avec des valeurs approchées arrondies à 10^{-2} près, construire la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de x comprises entre -2 et 1.

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	$-0,2$	$-0,1$	$-0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,2$	$0,5$	1
$f(x)$												

5. Soit f_1 la fonction définie par $\left\{\begin{array}{l c l}f_1(x) & = & f(x),\ x \neq 0\\ f_1(0) & = & 0\end{array}\right.$

   Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En supposant que f_1 est dérivable en 0, expliquer comment on peut déterminer graphiquement une valeur approchée du nombre dérivé $f'(0)$; faire cette lecture graphique. Quel résultat de limite cela permet-il de conjecturer ?

D. On se propose de trouver un encadrement de l'intégrale :

$$J = \int_{-2}^{-1} \frac{e^{2x}-1}{x}\,dx.$$

Montrer que pour tout x de $[-2\,;\,-1]$ on a : $-\dfrac{0,86}{x} \leqslant \dfrac{e^{2x}-1}{x} \leqslant -\dfrac{0,99}{x}$.
En déduire un encadrement de J d'amplitude 0,1.