∽ Baccalauréat S Asie juin 2003 ∾

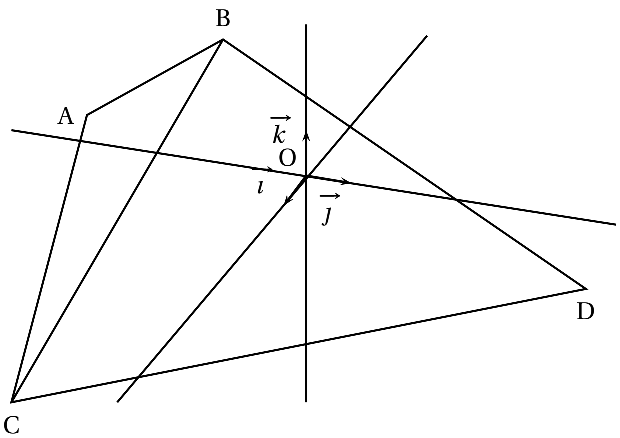
EXERCICE 1 **5 points**

Commun tous les candidats

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$\text{A}(3\,;\,-2\,;\,2) \quad ; \quad \text{B}(6\,;\,1\,;\,5) \quad ; \quad \text{C}(6\,;\,-2\,;\,-1).$$



Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit P le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.
   Montrer que P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Soit P′ le plan orthogonal la droite (AC) et passant par le point A.
   Déterminer une équation cartésienne de P′.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans P et P′.

Partie B

1. Soit D le point de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-1)$.
   Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Calculer le volume du tétraèdre ABDC.
3. Montrer que l'angle géométrique BDC a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4. **a.** Calculer l'aire du triangle BDC.
   b. En déduire la distance du point A au plan (BDC).

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Γ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 2(1+\text{i})z.$$

   On pose $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$, où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel. Montrer que $\mathscr{H}$ est la représentation graphique d'une fonction h que l'on déterminera (l'étude de la ronction h n'est pas demandée). $\mathscr{H}$ est tracée sur ie graphique ci-dessous.

2. Montrer que le point A d'affixe $a = 2(1+\text{i})$ appartient à Γ et $\mathscr{H}$.

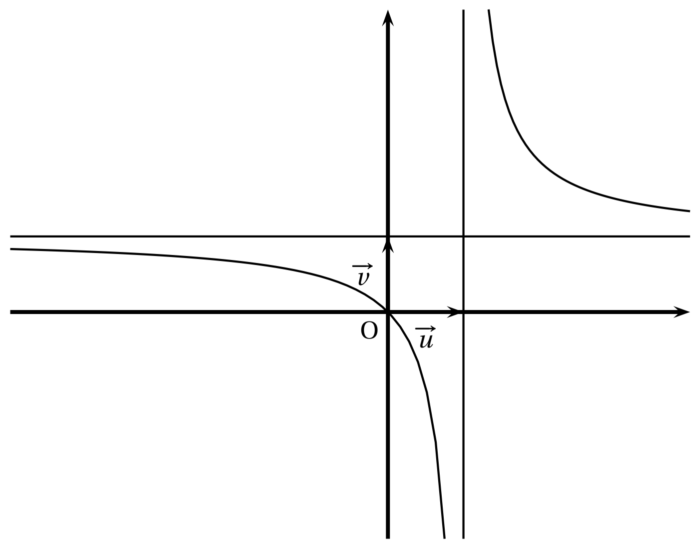
3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On note B et C les points tels que R(A) = B et R(C) = A.

a. Montrer que R(B) = C et que les triangles OAB, OBC et OCA sont isométriques.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

c. Montrer que B et C appartiennent à Γ et $\mathscr{H}$.

d. Tracer Γ et placer A, B et C sur le graphique ci-dessous.



EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n+3$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a\,;\,b) = \text{PGCD}(bc - a\,;\,b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}\left(3n^3 - 11n\,;\,n+3\right) = \text{PGCD}(48\,;\,n+3).$$

4. **a.** Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

PROBLÈME **11 points**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et soit $(\mathscr{C}')$ celle de la fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que $(\mathscr{C})$ a deux asymptotes que l'on déterminera.
2. Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f.
3. Soit I le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de I.
4. Pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$.
   a. Étudier les variations de la fonction g.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0\,;\,2[$ et $]2\,;\,4[$. Soit α la solution appartenant $]2\,;\,4[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. **a.** Montrer que $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en deux points.
   b. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :
   $$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$
6. Tracer $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

Partie B

1. Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan définie par les inégalités suivantes :
   $$\begin{cases} 1 \leqslant \ x \ \leqslant \alpha & (\alpha \quad \text{est le réel défini dans la partie A}) \\ 0 \leqslant \ y \ \leqslant f(x) & \end{cases}$$
   a. Déterminer l'aire de $\mathscr{D}$, notée $\mathscr{A}(\alpha)$, en unités d'aire (on utilisera une intégration par parties).
   b. Montrer que $\mathscr{A}(\alpha) = 2 - \dfrac{2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $\mathscr{A}(\alpha)$ 10^{-2} prs.
2. Soit la suite (I_n) définie pour n supérieur ou égal à 1 par :
   $$I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
   a. Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :
   $$0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$
   b. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

c. Soit $S_n = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \cdots + I_n$. Calculer S_n puis la limite de la suite (S_n).

Partie C

On considère, pour tout n supérieur ou égal à 1, la fonction f_n, définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x^{2n}}.$$

1. Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n.

2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Soit x_n la solution de cette équation.

3. Déterminer la limite de la suite (x_n).