

## Baccalauréat série S France juin 2003

### EXERCICE 1

5 points

#### Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $a = 2$ ,  $b = 1 - i$  et  $c = 1 + i$ .

1.
  - a. Placer les points A, B et C sur une figure.
  - b. Calculer  $\frac{c-a}{b-a}$ . En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
2.
  - a. On appelle  $r$  la rotation de centre A telle que  $r(B) = C$ .  
Déterminer l'angle de  $r$  et calculer l'affixe  $d$  du point  $D = r(C)$ .
  - b. Soit  $\Gamma$  le cercle de diamètre [BC].  
Déterminer et construire l'image  $\Gamma'$  du cercle  $\Gamma$  par la rotation  $r$ .
3. Soit  $M$  un point de  $\Gamma$  d'affixe  $z$ , distinct de C et  $M'$  d'affixe  $z'$  son image par  $r$ .
  - a. Montrer qu'il existe un réel  $\theta$  appartenant à  $\left[0; \frac{\pi}{2} \left[ \cup \right] \frac{\pi}{2}; 2\pi \right[$  tel que  $z = 1 + e^{i\theta}$ .
  - b. Exprimer  $z'$  en fonction de  $\theta$ .
  - c. Montrer que  $\frac{z'-c}{z-c}$  est un réel. En déduire que les points C, M et  $M'$  sont alignés.
  - d. Placer sur la figure le point M d'affixe  $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et construire son image  $M'$  par  $r$ .

### EXERCICE 2

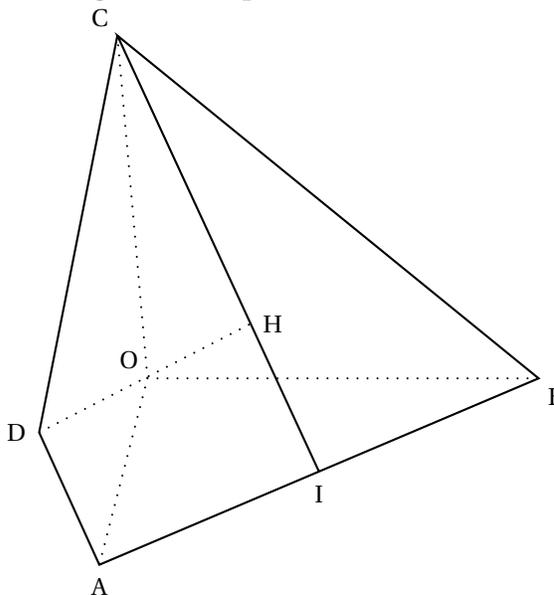
5 points

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soient  $a$  un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
- $OA = OB = OC = a$ .

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par  $\vec{HO} = \vec{OD}$ .



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH
  - a. Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.

b. Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que  $OH = a\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

4. Étude du tétraèdre ABCD.

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(O; \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OC})$ .

- a. Démontrer que le point H a pour coordonnées :  $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3})$ .
- b. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
- c. Soit  $\Omega$  le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que  $\Omega$  est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

**EXERCICE 2**

**5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Les questions 3. et 4. sont indépendantes des questions 1. et 2. seule l'équation de  $\Gamma$  donnée en 1. c. intervient à la question 4..

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

- a. Montrer que les plans P et Q d'équations respectives  $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$  et  $2x - z = 0$  ne sont pas parallèles.
- b. Donner un système d'équations paramétriques de la droite  $\Delta$  intersection des plans P et Q.
- c. On considère le cône de révolution  $\Gamma$  d'axe (Ox) contenant la droite  $\Delta$  comme génératrice.  
Montrer que  $\Gamma$  pour équation cartésienne  $y^2 + z^2 = 7x^2$ .

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de l avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.

Déterminer dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

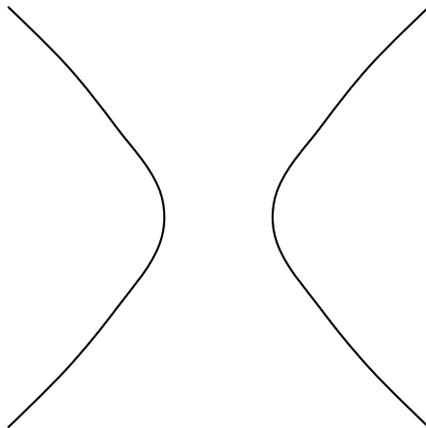


Figure 1

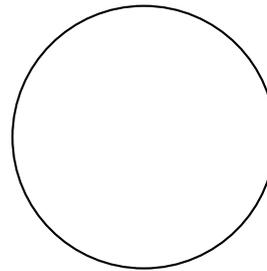


Figure 2

- 3. a. Montrer que l'équation  $x^2 \equiv 3 \pmod{7}$ , dont l'inconnue  $x$  est un entier relatif, n'a pas de solution,
- b. Montrer la propriété suivante :  
pour tous entiers relatifs  $a$  et  $b$ , si 7 divise  $a^2 + b^2$  alors 7 divise  $a$  et 7 divise  $b$ .

4. a. Soient  $a, b$  et  $c$  des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :  
si le point A de coordonnées  $(a, b, c)$  est un point du cône  $\Gamma$  alors  $a, b$  et  $c$  sont divisibles par 7.
- b. En déduire que le seul point de  $\Gamma$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

**PROBLÈME**

**11 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit  $N_0$  le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant  $t = 0$  ( $N_0$  étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

**Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :**

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

**Partie A**

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note  $f(t)$  le nombre de bactéries à l'instant  $t$  (exprimé en millions d'individus). La fonction  $f$  est donc solution de l'équation différentielle :  $y' = ay$ . (où  $a$  est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que  $f(0) = N_0$ .
2. On note  $T$  le temps de doublement de la population bactérienne.  
Démontrer que, pour tout réel  $t$  positif :  $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$ .

**Partie B**

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante : Soit  $g(t)$  est le nombre de bactéries à l'instant  $t$  (exprimé en millions d'individus) ; la fonction  $g$  est une fonction strictement positive et dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  qui vérifie pour tout  $t$  de  $[0 ; +\infty[$  la relation :

$$(E) \quad g'(t) = ag(t) \left[ 1 - \frac{g(t)}{M} \right].$$

où  $M$  est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et  $a$  le réel défini dans la **partie A**.

1. a. Démontrer que si  $g$  est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction  $\frac{1}{g}$  est solution de l'équation différentielle

$$(E') \quad y' + ay = \frac{a}{M}.$$

- b. Résoudre (E').

- c. Démontrer que si  $h$  est une solution strictement positive de (E'), alors  $\frac{1}{h}$  vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif  $t$ ,  $g(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-at}}$  où  $C$  est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.
- Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$  et démontrer, pour tout réel  $t$  positif ou nul, la double inégalité :  $0 < g(t) < M$ .
  - Étudier le sens de variation de  $g$  (on pourra utiliser la relation (E)).  
Démontrer qu'il existe un réel unique  $t_0$  positif tel que  $g(t_0) = \frac{M}{2}$ .
  - Démontrer que  $g'' = a \left(1 - \frac{2g}{M}\right) g'$ . Étudier le signe de  $g''$ . En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant  $t_0$  défini ci-dessus.  
Exprimer  $t_0$  en fonction de  $a$  et  $C$ .
  - Sachant que le nombre de bactéries à l'instant  $t$  est  $g(t)$ , calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et  $t_0$ , en fonction de  $M$  et  $C$ .

### Partie C

- Le tableau présenté en **Annexe I** a permis d'établir que la courbe représentative de  $f$  passait par les points de coordonnées respectives  $(0; 1)$  et  $(0,5; 2)$ . En déduire les valeurs de  $N_0$ ,  $T$  et  $a$ .
- Sachant que  $g(0) = N_0$  et que  $M = 100 N_0$ , démontrer, pour tout réel  $t$  positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

- Tracer, sur la feuille donnée en **Annexe II**, la courbe  $\Gamma$  représentative de  $g$ , l'asymptote à  $\Gamma$  ainsi que le point de  $\Gamma$  d'abscisse  $t_0$ .
- Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

Document à rendre avec la copie

Annexe I

$t$ (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que le graphe de la fonction  $f$ , sont représentés dans le graphique ci-dessous.

Annexe II

