Baccalauréat La Réunion série S juin 2003

EXERCICE 1 **6 points**

Commun tous les candidats

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.
Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c et d.
Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.
Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.
Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et avec remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.

  a. X suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{4}$.

  b. $\text{P}(X = 0) = \dfrac{1}{2^{2n}}$

  c. $\text{P}(X < 5) = 1 - \text{P}(X > 5)$

  d. $\text{E}(X) = 0,75n$

2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée.
Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :
• Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % sont négatifs.
• Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs).
Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.
On note M l'évènement : **l'individu est malade** et T l'évènement : **le test pratiqué est positif**.

  a. $\text{P}_{\text{M}}(\text{T}) + \text{P}_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) = 1,01.$

  b. $\text{P}_{\text{M}}(\text{T}) + \text{P}_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) = \text{P}(\text{T})$

  c. $\text{P}(\text{T}) = 2,97.10^{-2}$

  d. Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.

3. La durée d'attente en seconde de la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :

  a. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = \text{e}^{-0,01t}$

  b. Pour tout réel t positif, $\text{P}(Y \leqslant t) = 1 - \text{e}^{-0,01t}$

  c. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16.

  d. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite [AE) défini par $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

1. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a.
2. Soit K le barycentre du système de points pondérés :

$$\left\{\left(M\,;\,a^2\right),\ (\mathrm{B}\,;\,1),\ (\mathrm{D}\,;\,1)\right\}.$$

   a. Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{B}K}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{B}M}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

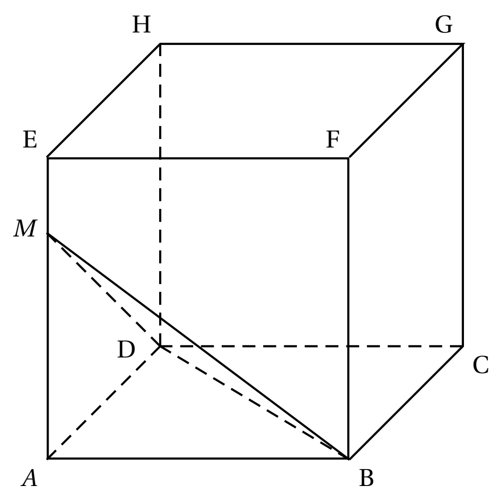
   b. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{B}K} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}K} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{B}K} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{D}} = 0$.

   c. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{D}K} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{B}} = 0$.

   d. Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{\mathrm{A}K} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{B}} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}K} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{D}} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?
4. a. Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.

   b. Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 1 cm, pour unité graphique. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)z - 1 + \mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$.

   Calculer $\Omega\mathrm{M}_0$ et donner une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}_0}\right)$.

3. On considère la suite de points $(M_n)_{n \geqslant 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du poini M_n.

 a. Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

 b. Monter par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$z_n - \mathrm{i} = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7n\pi}{6}} (z_0 - \mathrm{i}).$$

 c. Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n, puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geqslant 10^2$.

4. **a.** On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5\,;\,-3)$ est solution, résoudre l'équation (E).

 b. Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\mathrm{Im}(z) = 1$ et $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$.

Caractériser géométriquement Δ et le représenter.

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. Préciser son plus petit élément.

PROBLÈME **9 points**

Commun à tous les candidats.

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \mathrm{e}^x$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. **a.** Démontrer que la fonction u définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ est solution de (E).

 b. Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0\,;\,+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

 c. En déduire toutes les solutions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation (E).

2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}\mathrm{e}^x.$$

 a. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

 b. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation $f_k'(x) = 0$.

3. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormaI $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

 On a tracé sur le graphique ci-joint les courbes $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_{-0,25}$, $\mathscr{C}_{-0,15}$ et $\mathscr{C}_0$.

 En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).

4. Pour tout réel a strictement positif, on pose $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_a^{a+1} \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$.

 a. Interpréter géomtriquement $\mathscr{A}(a)$.

 b. On désigne par F une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

 En remarquant que $\mathscr{A}(a) = F(a+1) - F(a)$ étudier le sens de variation de la fonction qui à tout réel a élément de $]0\,;\,+\infty[$ associe le réel $\mathscr{A}(a)$.

c. On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre les courbes $\mathscr{C}_0$ et $(\mathrm{O}x)$ soit minimale. Comment doit-on procéder ?

Annexe du problème