Baccalauréat série S Liban mai 2003

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.
2. On considère les évènements suivants :
   B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,
   U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n.
   b. Exprimer la probabilit de l'évènement U_n en fonction de n.
   c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :
   $$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.
   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
   b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
   $$4z^2 - 12z + 153 = 0.$$
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = \frac{3}{2} + 6\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2} - 6\mathrm{i}$; $z_{\mathrm{C}} = -3 - \frac{1}{4}\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{P}} = 3 + 2\mathrm{i}$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}\mathrm{i}$.
   a. Déterminer l'affixe z_{Q} du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\vec{w}$.
   b. Déterminer l'affixe z_{R} du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.
   c. Déterminer l'affixe z_{S} du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   Placer les points P, Q, R et S.
3. **a.** Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b. Calculer $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.

En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

c. Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.

4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$?

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{array}{lcl} x_0 = 3 & \text{et} & x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1 & \text{et} & y_{n+1} = 2y_n + 3. \end{array}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2. **a.** Calculer le pgcd de x_8 et x_9, puis celui de $x_{2\,002}$ et $x_{2\,003}$. Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour $x_{2\,002}$ et $x_{2\,003}$ d'autre part ?

b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

b. Exprimer y_n en fonction de n.

c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d. On note d_n le pgcd de x_n et y_n pour tout entier naturel n.

Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A Étude d'une fonction auxiliaire *g*

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x + 2x - 7$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α telle que :

$$0,94 < \alpha < 0,941.$$

4. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x - 5)\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Calculer $f'(x)$, ou f' désigne la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Dresser le tableau de variations de f.

4. **a.** Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.

   b. Étudier le sens de variations de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$.
   En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la **partie A**, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.

5. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$, d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.

6. Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

Partie C - Calcul d'aires

À l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{5}{2}$.

Partie D - Étude d'une suite de rapports de distances

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on considère les points A_n, B_n, et C_n d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$; soit u_n le réel défini par :

$$u_n = \frac{C_nB_n}{A_nB_n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$u_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5}.$$

2. **a.** Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

   b. Calculer la limite de la suite (u_n). Pouvait-on prévoir ce résultat ?