Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie mars 2003

Exercice 1 5 points

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère la transformation ponctuelle f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 1.$$

1. Déterminer les antécédents du point O.
2. Existe-t-il des points invariants par f ? Si oui, préciser leurs affixes respectives.
3. Montrer que deux points symétriques par rapport à O ont la même image. Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?
4. Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\text{i})$. Déterminer l'affixe du point A$'$ image de A par f puis prouver que les points O, A et A$'$ sont alignés.
5. Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ et N le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\theta}$.
   a. Montrer que N appartient au cercle (X) de centre O et de rayon 1.
   b. Lorsque θ varie, montrer que N', image du point N par f reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   c. Vérifier que $\overrightarrow{\text{O}N'} = 2\cos\theta\overrightarrow{\text{O}N}$. En déduire que les points O, N et N' sont alignés.
   d. Expliquer la construction du point N'.

Exercice 2 5 points

Une société de maintenance de photocopieurs désire optimiser ses prestations au niveau des entreprises, afin de proposer un abonnement adapté à ses services.
On note, pour n entier naturel non nul, I_n l'évènement « La société intervient durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur » et $p_n = p(I_n)$ la probabilité de l'évènement I_n.
Le bureau d'étude a mis en évidence les résultats suivants pour une entreprise déterminée :

- $p(I_1) = p_1 = 0,75$.
- Sachant qu'il y a eu une intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à $0,04$.
- Sachant qu'iI n'y a pas eu d'intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à $0,64$.

On rappelle que $\overline{\text{A}}$ est l'évènement contraire de l'évènement A et que $p_{\text{B}}(\text{A})$ est la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

Partie 1

1. Préciser $p_{I_n}(I_{n+1})$ et $p_{\overline{I_n}}(I_{n+1})$ puis calculer $p(I_{n+1} \cap I_n)$ et $p\left(I_{n+1} \cap \overline{I_n}\right)$ en fonction de p_n $(n \in \mathbb{N}^*)$.
2. En déduire $p_{n+1} = -0,6p_n + 0,64$.
3. On considère la suite (q_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $q_n = p_n - 0,4$.
   a. Démontrer que (q_n) est une suite géométrique.

b. En déduire q_n puis p_n en fonction de n.

c. Donner une valeur approchée de p_6 à 10^{-3} près par excès.

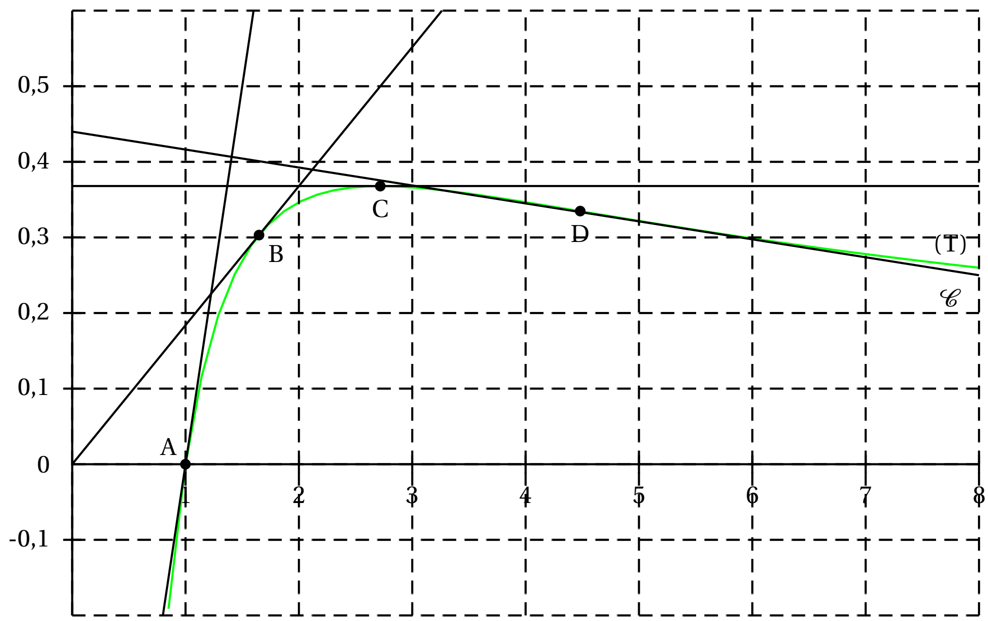
PARTIE 2

Le même mois, la société de maintenance installe un photocopieur dans 10 entreprises. Six mois plus tard, elle désire libérer une partie de son personnel afin de proposer un stage de mise à niveau.

On estime que la probabilité d'intervention du service de maintenance durant ce mois auprès de chacune de ces entreprises est égale à $0,373$.

Donner, à 10^{-3} près par excès, la probabilité qu'il y ait au moins un déplacement du service de maintenance durant ce mois (on supposera que les interventions dans les différentes entreprises sont des évènements indépendants).

Exercice 3 10 points



PARTIE I

Sur la figure ci-dessus est tracée dans un repère orthogonal la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f où f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Les points A, B, C et D sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1, $\sqrt{\text{e}}$, e et $\text{e}\sqrt{\text{e}}$; de plus, A appartient à l'axe des abscisses. La droite (T) est la tangente à $\mathscr{C}$ au point D.

1. Dans cette question, on ne demande qu'une observation graphique.
Avec la précision permise par ce graphique :

a. Donner une estimation à 5×10^{-2} près des coefficients directeurs des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, B, C et D.

b. Préciser combien la courbe $\mathscr{C}$ admet de tangentes horizontales, de tangentes passant par l'origine, de tangentes de coefficient directeur 1. Pour chacune de ces tangentes, donner l'abscisse du point de contact avec la courbe $\mathscr{C}$.

c. Choisir le seul tableau pouvant décrire les variations de la fonction dérivée de f. Justifier ce choix.

x	0		e		$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	

x	0		$\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	

x	0		$+\infty$
		$\nearrow$	

2. On rappelle que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.
On admet que la fonction dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

a. Étudier les variations de g. Cela corrobore-t-il votre choix dans la question **1. c.** ?

b. Déterminer les limites de g en 0, puis en $+\infty$.

c. Calculer $g(1)$, $g\left(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\right)$; puis démontrer que l'équation $g(x) = 1$ n'a qu'une seule solution. Quelle observation de la question **1. b.** a-t-on démontrée ?

d. Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \int_1^x \left(\frac{1 - \ln t}{t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

Calculer $f(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

Partie II

On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

1. Étudier les variations de f, préciser ses limites en 0 puis en $+\infty$.

2. On cherche à justifier les observations de la question **I. 1.** concernant les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ qui sont horizontales, qui ont un coefficient directeur égal à 1 ou qui passent par le point O origine du repère.
Démontrer que, dans chacun de ces cas, une seule tangente vérifie la condition donnée, préciser les abscisses des points de contact correspondants (on pourra utiliser les résultats démontrés dans la partie **I. 2. c.** et préciser ces points.

3. Étude de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point D (le point D a pour abscisse $\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}$).

a. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point D est

$$y = \frac{-x + 4\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{2\mathrm{e}^3}.$$

b. Montrer que le signe de $\left(2\mathrm{e}^3 \ln x + x^2 - 4\mathrm{e}x\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ détermine la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à cette tangente.

c. On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x) = 2\mathrm{e}^3 \ln x + x^2 - 4\mathrm{e}x\sqrt{\mathrm{e}}.$$

À partir des variations de φ, déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente (T).

Partie III Calcul d'aires

1. Démontrer que les abscisses des points A, B et C sont les trois premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison. Vérifier que l'abscisse de D est le quatrième terme de cette suite.
2. Soit x_0 un nombre réel strictement supérieur à 1 et E le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0. On considère les droites Δ_{A}, Δ_{B}, Δ_{C}, Δ_{D} et Δ_E parallèles à l'axe des ordonnées et passant respectivement par A, B, C, D et E.

   On note U_1 l'aire de la partie du plan limite par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites Δ_{A} et Δ_{C} ; U_2 l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites Δ_{B} et Δ_{D} et U_3 l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites Δ_{C} et Δ_E

   a. Calculer U_1, puis U_2.

   b. Déterminer x_0 pour que U_1, U_2 et U_3 soient les trois premiers termes d'une suite arithmétique. Quelle remarque peut-on faire sur l'abscisse du point E ?