# Baccalauréat S Polynésie juin 2003

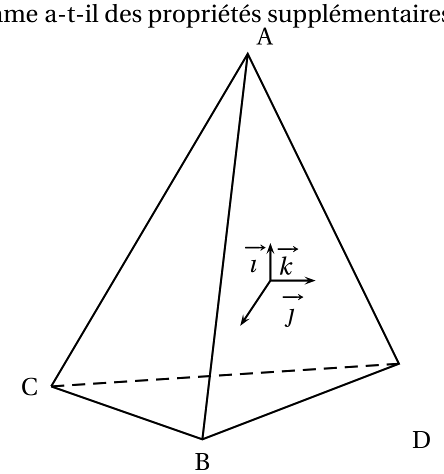
**EXERCICE 1** 4 points

**Partie A**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

$A(0\,;0\,;3)$, $B(2\sqrt{2}\,;\,0\,;\,-1)$, $C(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{6}\,;-1)$, $D(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{6}\,;-1)$.

1. Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.




**Partie B**

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1. Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2. Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3. Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».
4. On répète $n$ fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
   Calculer la probabilité $p_n$ pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois.
   Calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

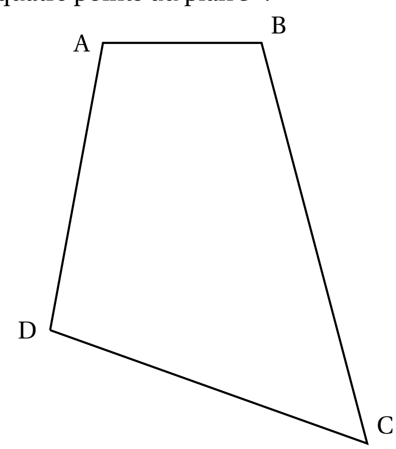
**EXERCICE 2 (Obligatoire)** 5 points

Dans tout l'exercice, le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Les constructions seront faites sur papier millimétré.

1. 
   a. Le point E a pour affixe $Z_E = 3 + i$ et le point F a pour affixe $Z_F = 1 + 3i$.
      Placer dans $\mathcal{P}$ les points E et F.
   b. Construire le point H tel que EHF soit un triangle rectangle isocèle direct de sommet H, c'est-à-dire tel que $\left(\overrightarrow{HF}\,;\,\overrightarrow{HE}\right) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. [0,5 pt]

**c.** On désigne par $Z_{\text{H}}$ l'affixe de H.
Montrer que $\left|\dfrac{3+\text{i}-Z_{\text{H}}}{1+3\text{i}-Z_{\text{H}}}\right| = 1$ et que $\arg\left(\dfrac{3+\text{i}-Z_{\text{H}}}{1+3\text{i}-Z_{\text{H}}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
En déduire que $\text{Z}_{\text{H}} = 3+3\text{i}$.

**2.** A, B, C et D sont quatre points du plan $\mathscr{P}$.




**a.** Construire les triangles rectangles isocèles directs BIA, AJD, DKC et CLB d'angles droits respectifs $\widehat{\text{BIA}}$, $\widehat{\text{AJD}}$, $\widehat{\text{DKC}}$ et $\widehat{\text{CLB}}$.

**b.** Conjecturer la position relative des droites (IK) et (LJ) et le rapport des longueurs des segments [IK] et [LJ].

**3.** **a.** On désigne par $a$, $b$ et $z_1$ les affixes respectives des points A, B et I.
Montrer que $\left|\dfrac{b-z_1}{a-z_1}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{b-z_1}{a-z_1}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.
En déduire que $z_1 = \dfrac{\text{i}a-b}{\text{i}-1}$.

**b.** Avec les points B, C et L d'affixes respectives $b$, $c$ et $z_{\text{L}}$, exprimer sans démonstration $z_{\text{L}}$ en fonction de $b$ et $c$.

**c.** Avec les points C, D et K d'affixes respectives $c$, $d$ et $z_{\text{K}}$, exprimer de même $z_{\text{K}}$ en fonction de $c$ et $d$. Avec les points D, A et J d'affixes respectives $d$, $a$ et $z_{\text{J}}$ exprimer de même $z_{\text{J}}$ en fonction de $a$ et $d$.

**d.** Montrer que $z_{\text{L}} - z_{\text{J}} = \text{i}(z_{\text{K}} - z_{\text{I}})$. En déduire que les droites (JL) et (KI) sont perpendicu[aires et que JL = KI.

**EXERCICE 2 (Spécialité)** 5 points

Le plan complexe est rapporté un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm.

On donne les points A, C, D et Ω, d'affixes respectives 1 + i, 1, 3 et $2+\dfrac{1}{2}\text{i}$.

**Partie A**

**1.** Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω passant par A.

**a.** Montrer que $\mathscr{C}$ passe par C et D.

**b.** Montrer que le segment [AD] est un diamètre de $\mathscr{C}$.

**c.** Sur une feuille de papier millimétré, faire une figure en plaçant les points A, C, D, Ω et tracer $\mathscr{C}$. On note B la seconde intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite (OA).

**d.** Montrer que le point O est extérieur au segment [AB].

2. Montrer par un raisonnement géométrique simple que les triangles OAD et OCB sont semblables mais non isométriques.

   Soit S la similitude qui transforme le triangle OCB en le triangle OAD.

   a. Montrer que S est une similitude indirecte différente d'une réflexion.
   b. Quel est le centre de S ?

**Partie B**

1. a. Déduire de la partie **A 2** que l'on a OA × OB = OC × OD.
   b. En déduire le module de l'affixe $z_B$ du point B. Déterminer un argument de $z_B$.
2. Déterminer l'écriture complexe de S.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S \circ S$.

**PROBLÈME** 11 points

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$. On appelle $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de $f$ dans un repère orthogonal.

1. Montrer que pour tout réel $x$,

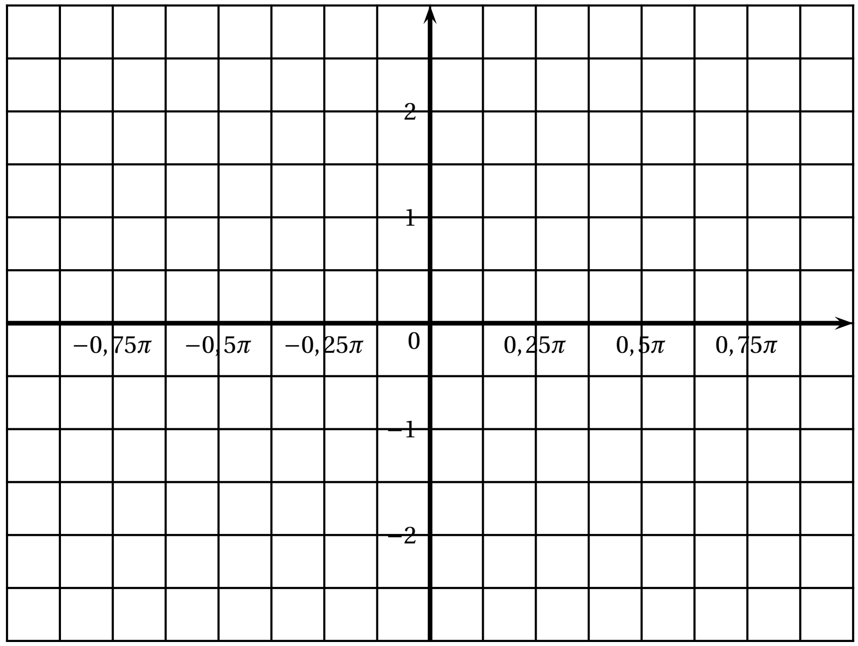
$$-\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^x.$$

   En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. Quelle est cette asymptote ?
2. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
3. On étudie $f$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2} ~;~ +\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   Démontrer que pour tout rel $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ~;~ +\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).$$

4. Calculer $f'(x)$, où $f'$ dsigne la fonction dérivée de $f$. Montrer que $f$ est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2} ~;~ +\dfrac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[+\dfrac{\pi}{4} ~;~ +\dfrac{\pi}{2}\right]$. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2} ~;~ +\dfrac{\pi}{2}\right]$. Indiquer les valeurs prises par $f$ en $-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2} ~;~ +\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur le graphique ci-dessous




6. Démontrer que, sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique $\alpha$. Trouver, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée décimale de $\alpha$ arrondie au centième.
7. On note $f''$ la fonction dérivée seconde de $f$. Montrer que $f''(x) = -2\mathrm{e}^x \sin x$.
   En déduire que, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,+\frac{\pi}{2}\right]$, le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x$ atteint, pour $x = 0$, une valeur maximale que l'on précisera.
   Trouver l'équation de la tangente T $\mathscr{C}_f$ en 0 et tracer T sur le graphique de la question 5.

**Partie B**

Pour tout entier naturel $n$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$.
2. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{\pi} - 1}{1+n^2}.$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel $|I_n| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{1+n^2}$ . En dduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

**Partie C**

On considère les équations différentielles

$$\text{(E)} \qquad y' - 2y - 1 = 0$$

$$\text{(E}'\text{)} \qquad y' - 2y = 1 - \mathrm{e}^x \sin x$$

où $y$ est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dire, en le justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. (E) admet une fonction polynôme du premier degré comme solution.
2. Soit $g$ une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$ ; si $g$ est solution de (E) alors elle est croissante sur D.

3. La fonction $x \longmapsto 3\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{2}$ est une solution de (E).
4. La primitive $F$ de $f$ qui s'annule en 0 est une solution de (E$'$).