

Corrigé du baccalauréat S Antilles–Guyane
juin 2005

EXERCICE 1

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. L'affixe de E' est $\frac{-1}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}$. Mais $-1 = e^{-i\pi}$. Donc E' a pour affixe $e^{-i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

On sait que $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc l'affixe de E' sous forme algébrique est $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- b. \mathcal{C}_1 est l'ensemble des points M d'affixe $e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi; \pi[$. L'image M' de M par F a pour affixe $\frac{-1}{e^{-i\theta}} = -e^{i\theta}$. Le point M' est donc le symétrique de M autour de O . Conclusion : l'image de \mathcal{C}_1 est le cercle \mathcal{C}_1 .

2. a. L'affixe de K' est $\frac{-1}{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = -\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Comme ci-dessus $-1 = e^{-i\pi}$, donc l'affixe de K' est $\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

- b. K appartient à \mathcal{C}_2 qui est l'ensemble des points M d'affixe $2e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi; \pi[$. L'image M' de M par F a pour affixe $\frac{-1}{2e^{-i\theta}}$ soit $-\frac{1}{2}e^{i\theta}$. Le point M' est donc comme l'image de M dans l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{4}$. Conclusion : l'image de \mathcal{C}_2 est le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.

3. a. On a $z' + 1 = \frac{-1}{\bar{z}} + 1 = \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z}}$.

Ceci entraîne que $|r' + 1| = \left| \frac{1 + e^{i\theta} - 1}{1 + e^{i\theta}} \right|$. Or $\overline{1 + e^{i\theta}} = 1 + e^{-i\theta}$,

$$|r' + 1| = \left| \frac{e^{-i\theta}}{1 + e^{i\theta}} \right| = \frac{|e^{-i\theta}|}{|1 + e^{i\theta}|} = \frac{1}{|1 + e^{i\theta}|} = \left| \frac{-1}{1 + e^{i\theta}} \right|.$$

D'après la définition de F , $\frac{-1}{1 + e^{i\theta}}$ est l'affixe de l'image du point d'affixe $1 + e^{i\theta}$. Conclusion : $|r' + 1| = |r'|$.

- b. $r' + 1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BR'}$ et r' celle du vecteur $\overrightarrow{OR'}$. La relation $|r' + 1| = |r'|$ établie en a. signifie que $\|\overrightarrow{BR'}\| = \|\overrightarrow{OR'}\|$ donc que l'image R' de R est équidistante des points d'affixes -1 et 0 : R' appartient par conséquent à la médiatrice de $[OB]$.

EXERCICE 1

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On a successivement $7^1 \equiv 7 \pmod{9}$, $7^2 \equiv 4 \pmod{9}$ et $7^3 \equiv 1 \pmod{9}$. Donc :

si $n \equiv 1 \pmod{3}$ alors $7^n \equiv 7 \pmod{9}$;
 si $n \equiv 2 \pmod{3}$ alors $7^n \equiv 4 \pmod{9}$;
 si $n \equiv 3 \pmod{3}$ alors $7^n \equiv 1 \pmod{9}$.

- b. $2005 \equiv 7 (9)$ donc $(2005)^{2005} \equiv 7^{2005} (9)$.
Or $2005 \equiv 1 (3)$. Donc, d'après le résultat du a. ci-dessus, $2005^{2005} \equiv 7 (9)$.
2. a. $10 \equiv 1 (9)$ donc, pour tout entier naturel n , $10^n \equiv 1 (9)$.
- b. Soit $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ un entier naturel écrit en base 10.
On sait que $N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$ et par suite que
 $S = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$.
D'après a., $a_p \times 10^p \equiv a_p (9)$. On a donc $N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 (9)$.
Ou encore $N \equiv S (9)$.
- c. Il en résulte que, pour que N soit divisible par 9, il faut et il suffit que son reste dans la division par 9, à savoir ici S , soit divisible par 9.
3. a. En appliquant c. on obtient successivement :
 $A \equiv B (9)$, $B \equiv C (9)$ et $C \equiv D (9)$ donc par transitivité $A \equiv D (9)$.
- b. $2\,005 < 10^4$ donc $(2\,005)^{2\,005} < 10^{4 \times 2\,005}$. Or $4 \times 2\,005 = 8\,020$ et par suite
 $(2\,005)^{2\,005} < 10^{8\,020}$. Donc A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres.
Le plus grand des nombres à 8 020 chiffres est $\underbrace{999 \dots 99}_{8\,020 \text{ fois le chiffre } 9}$; la somme de ses chiffres est alors égale à $8\,020 \times 9 = 72\,180$.
Sachant que $A < 10^{8\,020}$ il en résulte donc que la somme des chiffres de A , soit B , est au plus égale à la somme des chiffres du plus grand nombre à 8 020 chiffres. D'où $B \leq 72\,180$.
- c. De la même façon $72\,180 \leq 99\,999$ montre que la somme C des chiffres de B est inférieure à $9 \times 5 = 45$.
- d. En examinant les entiers inférieurs à 45 on remarque que celui dont la somme des chiffres est la plus grande est 39, de somme de chiffres 12. Donc $D \leq 12$.
- e. On sait que $A \equiv 7 (9)$ et que $A \equiv D (9)$ d'où il résulte que $D \equiv 7 (9)$.
Or le seul nombre inférieur à 12 vérifiant cette condition est 7. Donc $D = 7$.

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

1. Pour tout n de \mathbb{N}^* et pour tout x de $[0; 1]$ on a $x + n \in [n; n + 1]$. Donc $\frac{1}{x+n} \in \left[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n} \right]$.
2. a. $\int_0^1 \frac{1}{x+n} dx = \left[\ln(x+n) \right]_0^1 = \ln(1+n) - \ln n = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$.
- b. D'après 1.
- $$\int_0^1 \frac{1}{n+1} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} dx.$$
- Or $\int_0^1 \frac{1}{n+1} dx = \frac{1}{n+1}$ et $\int_0^1 \frac{1}{n} dx = \frac{1}{n}$. Soit, d'après a.,
- $$\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}.$$
3. $U(n+1) - U(n) = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n]$.
Soit $U(n+1) - U(n) = \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$.
On en déduit d'après 2. b. que $U(n+1) - U(n) \leq 0$: la suite U est décroissante.

$$4. V(n+1) - V(n) = \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+2) - \ln(n+1)].$$

$$\text{Soit } V(n+1) - V(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right).$$

$$\text{Or il résulte de 2. b. en remplaçant } n \text{ par } n+1 \text{ que } \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}.$$

Donc $V(n+1) - V(n) \geq 0$: la suite V est croissante.

$$5. U(n) - V(n) = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

$$\text{Mais } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0. \text{ Par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U(n) - V(n)) = 0.$$

Les suites U et V sont respectivement décroissante et croissante et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U(n) - V(n)) = 0$: elles sont donc adjacentes, par conséquent elles convergent et ont la même limite γ .

$$|U(n) - V(n)| \leq 10^{-2} \text{ si et seulement si } \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 10^{-2}, \text{ soit si et seulement}$$

$$\text{si } \frac{n+1}{n} \leq e^{0,01}.$$

$$\text{Or } \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}. \text{ Donc } |U(n) - V(n)| \leq 10^{-2} \text{ ssi } \frac{1}{n} \leq e^{0,01} - 1 \text{ et par suite si et}$$

$$\text{seulement si } n \geq \frac{1}{e^{0,01} - 1}.$$

$$\text{La calculatrice donne } \frac{1}{e^{0,01} - 1} \approx 99,5008\dots$$

En prenant $n \geq 100$ on est sûr que $|U(n) - V(n)| \leq 10^{-2}$.

La calculatrice donne $U_{100} \approx 0,582$ et $V_{100} \approx 0,573$. De l'encadrement :

$$0,572 \leq \gamma \leq 0,583$$

on en déduit que

$$\gamma = 0,58 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

EXERCICE 3

3 points

Commun à tous les candidats

1. b
2. c
3. c
4. c
5. b
6. a

EXERCICE 4

6 points

Commun à tous les candidats

A.] Soit M un point quelconque du plan médiateur de $[KL]$.

I est milieu du segment $[KL]$ donc (MI) est médiane relative au côté $[KL]$ dans le triangle KML .

La droite (MI) , droite du plan perpendiculaire à la droite (KL) en I est donc perpendiculaire à (KL) . Donc (MI) est médiatrice du côté $[KL]$ du triangle KML .

Dans le triangle KML , (MI) est médiane et médiatrice : ce triangle est donc isocèle de sommet M . Par suite $MK = ML$.

Le plan médiateur de $[KL]$ apparaît donc bien comme l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L .

Autre méthode

$$\begin{aligned} MK = ML &\iff MK^2 = ML^2 \iff MK^2 - ML^2 = 0 \iff \\ \left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}\right)\left(\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{ML}\right) &= 0 \iff 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{LK} = 0. \end{aligned}$$

Donc M est équidistant de K et de L si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{MI} et \overrightarrow{LK} sont orthogonaux, c'est-à-dire si M appartient au plan médiateur de $[KL]$.

B.

1. Soit I le milieu de $[AB]$. Le point M appartient au plan médiateur de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB}$.

Comme $I \left(3; 1; -\frac{1}{2} \right)$, $\overrightarrow{AB} (-2; 2; 5)$ et $M(x; y; z)$, une équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$ est donc : $-2(x-3) + 2(y-1) + 5\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0 \iff -2x + 2y + 5z + \frac{13}{2} = 0 \iff 4x - 4y - 10z - 13 = 0$.

2. Les coordonnées du point commun aux trois plans doivent constituer l'unique solution du système :

$$(S) \begin{cases} 4x - 4y - 10z - 13 = 0 & (1) \\ 2x - 10y - 6z - 7 = 0 & (2) \\ 3x - 3y + 2z - 5 = 0 & (3) \end{cases}$$

On ajoute à l'équation (1) multipliée par 3 l'équation (3) multipliée par -4 , pour obtenir :

$$12x - 12y - 30z - 39 - 12x + 12y - 8z + 20 = 0 \iff -19 = 38z \iff z = -\frac{1}{2}.$$

En remplaçant z par cette valeur dans les équations (1) et (2), on obtient le système 2×2 suivant

$$\begin{cases} 4x - 4y = 8 \\ 2x - 10y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 2 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$$

qui donne aussitôt $y = 0$ par différence, puis $x = 2$.

Conclusion : les coordonnées de E sont : $\left(2; 0; -\frac{1}{2} \right)$.

3. D'après la partie A :

- $EA = EB$ puisque E appartient au plan médiateur de $[AB]$;
- $EB = EC$ puisque E appartient au plan médiateur de $[BC]$;
- $EC = ED$ puisque E appartient au plan médiateur de $[CD]$;

Donc $EA = EB = EC = ED$.

Les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère de centre E .

Or $\overrightarrow{EA} \left(2; 0; -\frac{5}{2} \right)$, donc $EA^2 = 4 + \frac{25}{4} = \frac{41}{4}$.

Le rayon de la sphère est donc égal à $\frac{\sqrt{41}}{2}$.