

## Baccalauréat S Asie juin 2005

### EXERCICE 1

3 points

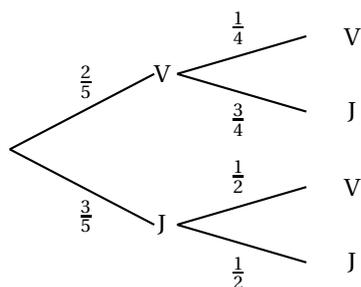
Commun à tous les candidats

1. Pour  $t = 1$ , on obtient bien le triplet  $(3 ; 1 ; -4)$  : affirmation C
2.  $\vec{u}(2 ; -1 ; -1)$  est un vecteur directeur évident, donc  $-\vec{u}(-2 ; 1 ; 1)$  en est aussi un : affirmation B.
3.  $M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \iff 1 + 2t + 4 - 2t + 9 + 3t = 0 \iff 14 = 3t \iff t = \frac{14}{3}$ . Il existe donc un seul point commun : affirmation C.
4. Le triplet  $(1 ; 3 ; 2)$  vérifie  $x + 2y - 3z - 1 = 0$  : affirmation B.
5. Un vecteur normal à  $\mathcal{Q}_\epsilon$  est le vecteur  $\vec{v}_2(4 ; -5 ; 2)$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$  : affirmation B.
6. On a  $d(T, \mathcal{P}) = \frac{|-1 - 6 - 6 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$  : affirmation A

### EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats



1.
  - a. On a en suivant la branche supérieure  $p(V) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ .  
De même  $p(J) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ .
  - b. En tournant la roue, la probabilité de gagner 20 € est  $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ , celle de gagner 100 € est donc  $\frac{1}{8}$ ; par différence la probabilité d'être remboursé(e) est  $\frac{5}{8}$ .  
On a donc  $p_R(V) = \frac{5}{8}$ .  
Or  $p_R(V) = \frac{p(V \cap R)}{p(V)} \iff \frac{5}{8} = \frac{p(V \cap R)}{\frac{1}{10}} \iff p(V \cap R) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{80}$ .
  - c. On a  $p(R) = p(J) + p(V \cap R) = \frac{3}{10} + \frac{5}{80} = \frac{29}{80}$ .
  - d.  $p(100) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$ ;  $p(20) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40}$ .
2.
  - a.  $X$  peut prendre les valeurs :  $-m$  ;  $100 - m$  ;  $20 - m$  ;  $0$ .
  - b.

$x_i$	$-m$	$100 - m$	$20 - m$	$0$
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{29}{80}$

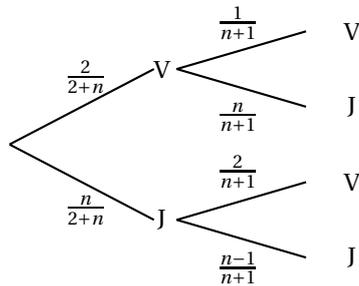
c. On a  $E(X) = \sum_{i=1}^4 p_i \times x_i = -\frac{6m}{10} + \frac{100-m}{80} + \frac{20-m}{40} + 0 = \frac{140-51m}{80}$ .

d. L'organisateur ne perdra pas d'argent si  $E(X) < 0 \iff \frac{140-51m}{80} < 0 \iff m > \frac{140}{51}$ . Donc il faut que  $m$  soit au moins fixé à 3 euros.

3. On reconnaît une expérience de Bernoulli avec  $p = \frac{4}{10}$  et  $n = 4$ .

La probabilité de ne pas perdre est égale à  $\left(\frac{4}{10}\right)^4$ , donc la probabilité de perdre au moins une fois est  $1 - \left(\frac{4}{10}\right)^4 = 1 - 0,0256 = 0,9744$ .

4. On obtient un nouvel arbre de probabilités :



On doit avoir  $\frac{2n}{(n+1)(n+2)} + \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{4n}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{2} \iff n^2 - 5n + 2 \geq 0$ . Le trinôme  $n^2 - 5n + 2$  a pour racines  $n_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \approx 4,56$  et  $n_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \approx 0,44$ . Il faut donc qu'il y ait plus de 4 boules jaunes.

### EXERCICE 3

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

I.

- On a  $(i^3 + (-8+i) \times i^2 + (17-8i) \times i = i + 8 - i - 17i - 8 + 17i = 0 \iff i$  est solution de (E).
- En développant le second membre et en identifiant les coefficients des termes de même degré, on obtient le système :

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ ai + b & = & -8 + i \\ bi + c & = & 17 - 8i \\ ic & = & 17i \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & -8 \\ c & = & 17 \end{cases}$$

On a donc pour tout complexe  $z$ ,  $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)((z^2 - 8z + 17))$ .

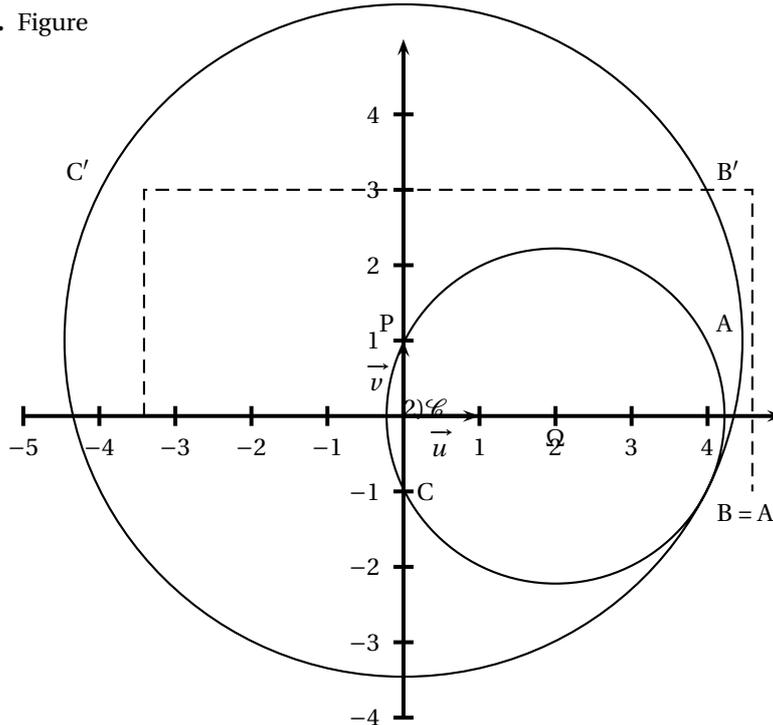
- On a donc (E)  $\iff (z+i)((z^2 - 8z + 17)) = 0 \iff \begin{cases} z+i & = & 0 \\ z^2 - 8z + 17 & = & 0 \end{cases}$ .

On trouve aussitôt que :

$$S = \{-i; 4+i; 4-i\}$$

II.

1. Figure



2. L'écriture complexe de la rotation est :  $z' - 2 = i(z - 2)$ . Donc  $z_S - 2 = i(4 + i - 2) \iff z_S = 2 + 2i - 1 = 1 + 2i$ .

3. D'après la question précédente :  $\Omega S = \Omega A$ .  
 A et B sont symétriques autour de  $(Ox)$ , et  $\Omega \in (Ox)$ , donc  $\Omega A = \Omega B$ ; enfin B et C ayant la même ordonnée,  $\Omega$  appartient à la médiatrice de  $[BC]$  et  $\Omega B = \Omega C$ .  
 Conclusion B, A, S et C appartiennent à un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$ .  
 Le rayon est égal à  $\Omega C = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ .

4. a. D'après la définition algébrique  $z_{A'} = \frac{i(4+i) + 10 - 2i}{4+i-2} = \frac{9+2i}{2+i} = \frac{(9+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{20-5i}{5} = 4-i = z_B$ .

$z_{B'} = \frac{i(4-i) + 10 - 2i}{4-i-2} = \frac{11+2i}{2-i} = \frac{(11+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{20+15i}{5} = 4+3i$ .

$z_{C'} = \frac{i(-i) + 10 - 2i}{-i-2} = \frac{11-2i}{-2-i} = \frac{(11-2i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-20+15i}{5} = -4+3i$ .

b.  $PA' = |4 - i - i| = |4 - 2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ;  
 $PB' = |4 + 3i - i| = |4 + 2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ;  
 $PC' = |-4 + 3i - i| = |4 + 2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ;  
 Donc  $A', B'$  et  $C'$  appartiennent au cercle  $\mathcal{C}'$  de centre P et de rayon  $\sqrt{5}$ .

c. On a  $z' = \frac{i(z-2) + 10}{z-2} = i + \frac{10}{z-2} \iff z' - i = \frac{10}{z-2}$  et en prenant les modules  $|z' - i| = \frac{10}{|z-2|}$ . Donc géométriquement  $PM' = \frac{10}{\Omega M}$ .

d. Si  $M \in \mathcal{C} \implies \Omega M = \sqrt{5}$ . D'après la question précédente  $|z' - i| = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = PM'$ .

e. Géométriquement la dernière relation signifie :  $PM' = 2\sqrt{5} \iff$  les points  $M'$  appartiennent au cercle  $\mathcal{C}'$ .

**Remarque :**  $M \in \mathcal{C} \implies z = 2 + \sqrt{5}e^{i\theta}$  avec  $\theta \in [0; 2\pi[$ . Après calcul on en déduit que  $z' = i + 2\sqrt{5}e^{-i\theta}$  avec  $\theta \in [0; 2\pi[$ .  
 En prenant les modules on trouve bien que  $|z' - i| = 2\sqrt{5}$ .

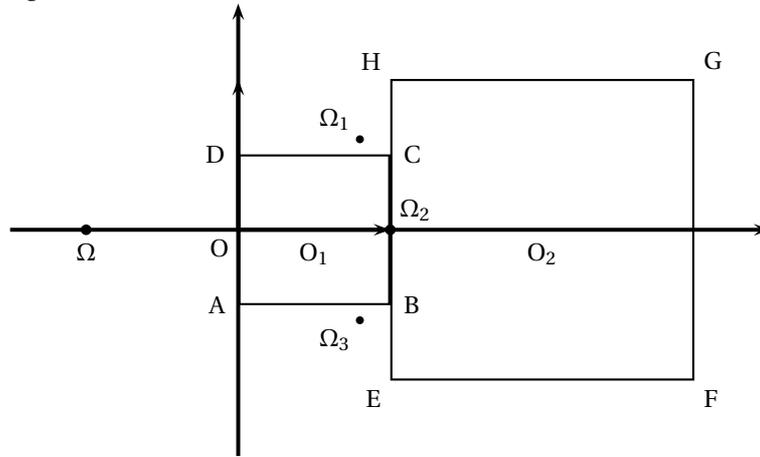
f. Conclusion : l'image du cercle  $\mathcal{C}$  est donc **tout** le cercle  $\mathcal{C}'$ .

## EXERCICE 3

5 points

## Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. Figure.



2. L'égalité vectorielle  $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$  se traduit par  $z' + 1 = 2(z + 1) \iff z' = 2z + 1$ .

$$z'_{A'} = 2z_A + 1 = 2 \times \left(-\frac{i}{2}\right) + 1 = 1 - i = z_E.$$

$$z'_{B'} = 2z_B + 1 = 2 \times \left(1 - \frac{i}{2}\right) + 1 = 3 - i = z_F.$$

$$z'_{C'} = 2z_C + 1 = 2 \times \left(1 + \frac{i}{2}\right) + 1 = 3 + i = z_G.$$

$$z'_{D'} = 2z_D + 1 = 2 \times \left(\frac{i}{2}\right) + 1 = 1 + i = z_H.$$

L'image de  $S_1$  par  $h$  est donc  $S_2$ .

3.  $g = h^{-1} \circ s$ .

a. La similitude  $s$  transformant le carré de côté 1 en le carré de côté 2, le rapport de la similitude est égal à 2.

b.  $h^{-1}$  est l'homothétie de centre  $\Omega$  de rapport  $\frac{1}{2}$ ; la composée  $g$  est donc une similitude directe de rapport 1, donc une isométrie.  $S_1$  a pour image par  $s$   $S_2$  qui lui-même a pour image par  $h^{-1}$ ,  $S_1$ . Conclusion  $g$  laisse  $S_1$  globalement invariante.

c.  $S_1$  étant invariant, son centre l'est également :  $g(O_1) = O_1$ .

d. Les isométries du carré sont :

- l'identité;
- la rotation  $r_1$  de centre  $O_1$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$   $[2\pi]$ ;
- la rotation  $r_2$  de centre  $O_1$  d'angle  $\pi$   $[2\pi]$  (symétrie autour de  $O_1$ );
- la rotation  $r_3$  de centre  $O_1$  d'angle  $-\frac{\pi}{2}$   $[2\pi]$ .

e. On a  $s = h \circ g$ . Il y a donc quatre similitudes qui transforment  $S_1$  en  $S_2$  :

- l'homothétie  $h$ ;
- la composée de  $h$  avec  $r_1$ ;
- la composée de  $h$  avec  $r_2$ ;
- la composée de  $h$  avec  $r_3$ ;

4. Écritures complexes de ces isométries :

a. -  $h \circ r_1$  :

$$\text{L'écriture complexe de } r_1 \text{ est } z' - \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) \iff z' = iz - \frac{i}{2} + \frac{1}{2};$$

celle de  $h \circ r_1$  est donc :  $z' = 2iz - i + 2$ .

-  $h \circ r_2$  :

$$\text{L'écriture complexe de } r_2 \text{ est } z' - \frac{1}{2} = e^{i\pi} \left(z - \frac{1}{2}\right) \iff z' = -z + 1; \text{ celle}$$

de  $h \circ r_2$  est donc  $z' = -2z + 3$ ;

-  $h \circ r_3$  :

L'écriture complexe de  $r_3$  est  $z' - \frac{1}{2} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \left( z - \frac{1}{2} \right) \iff z' = -iz + \frac{i}{2} + \frac{1}{2}$  ;  
celle de  $h \circ r_3$  est donc  $z' = -2iz + i + 2$ .

**b.** Les centres de ces similitudes sont les points invariants :

- Centre  $\Omega_1$  de  $h \circ r_1$ . Son affixe  $\omega_1$  est solution de  $z = 2iz - i + 2 \iff$   
 $z = \omega_1 = \frac{4 + 3i}{5}$ .

- Centre  $\Omega_2$  de  $h \circ r_2$ . Son affixe  $\omega_2$  est solution de  $z = -2z + 3 \iff$   
 $z = \omega_2 = 1$ .

- Centre  $\Omega_3$  de  $h \circ r_3$ . Son affixe  $\omega_3$  est solution de  $z = -2iz + i + 2 \iff$   
 $z = \omega_3 = \frac{4 - 3i}{5}$ .

#### EXERCICE 4

7 points

#### Commun à tous les candidats

1. Si  $n = 1$ ,  $I_1 = \int_0^2 (2-x)e^x dx$ . On intègre par parties :

$u(x) = 2-x$   $v'(x) = e^x$   
 $u'(x) = -1$   $v(x) = e^x$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et leurs dérivées continues sur l'intervalle  $[0; 2]$ , donc :

$$I_1 = [(2-x)e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = -2 + [e^x]_0^2 = -2 + e^2 - 1 = e^2 - 3.$$

2. On a les équivalences  $0 \leq x \leq 2 \iff -2 \leq -x \leq 0 \iff 0 \leq 2-x \leq 2 \iff 0 \leq (2-x)^n \leq 2^n \iff 0 \leq (2-x)^n e^n \leq 2^n e^n \iff 0 \leq \frac{1}{n!} (2-x)^n e^n \leq \frac{1}{n!} 2^n e^n$ .

On en déduit l'ordre des intégrales suivantes :

$$\int_0^2 0 dx \leq \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^n dx \leq \int_0^2 \frac{1}{n!} 2^n e^n dx \iff 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \times 2^n [e^x]_0^2 \iff 0 \leq I_n \leq \frac{2^n (e^2 - 1)}{n!}.$$

3. On a  $I_{n+1} = \int_0^2 \frac{1}{(n+1)!} (2-x)^{n+1} e^x dx$ .

Intégrons par parties en posant :

$$u(x) = (2-x)^{n+1} \quad v'(x) = e^x$$

$$u'(x) = -(n+1)(2-x)^n \quad v(x) = e^x.$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et leurs dérivées continues sur l'intervalle  $[0; 2]$ , donc :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left( [(2-x)^{n+1} e^x]_0^2 - \int_0^2 -(n+1)(2-x)^n e^x dx \right) =$$

$$- \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \int_0^2 (2-x)^n e^x dx = - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n.$$

4. Démontrons la relation par récurrence :

• Initialisation :  $e^2 - 1 = 2 + I_1 \iff I_1 = e^2 - 3$  : vrai ;

Hérédité : supposons que  $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$ . D'après la question précédente, on peut écrire :  $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$  qui est bien la relation demandée au rang  $n+1$ . L'égalité est donc vraie pour tout  $n$  supérieur ou égal à 1.

5. a. Quel que soit le naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ . Le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} =$   
 $\frac{2}{n+1}$ .

$$\text{Or } n \geq 3 \iff n+1 \geq 4 \iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4} \iff \frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Conclusion : si  $n \geq 3$ , alors  $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$ .

- b. En écrivant toutes les inégalités précédentes de 3 à  $n$  et en multipliant membres à membres (tous les termes sont supérieurs à zéro) on obtient :

$$0 \leq u_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}.$$

- c. On a  $-1 < \frac{1}{2} < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$ . Donc d'après l'encadrement trouvé à la question b. on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

On a également  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ ; donc d'après l'encadrement démontré à la question 2. on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

- d. En reprenant l'égalité obtenue à la question 4. et par limite on obtient que :

$$e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right).$$