

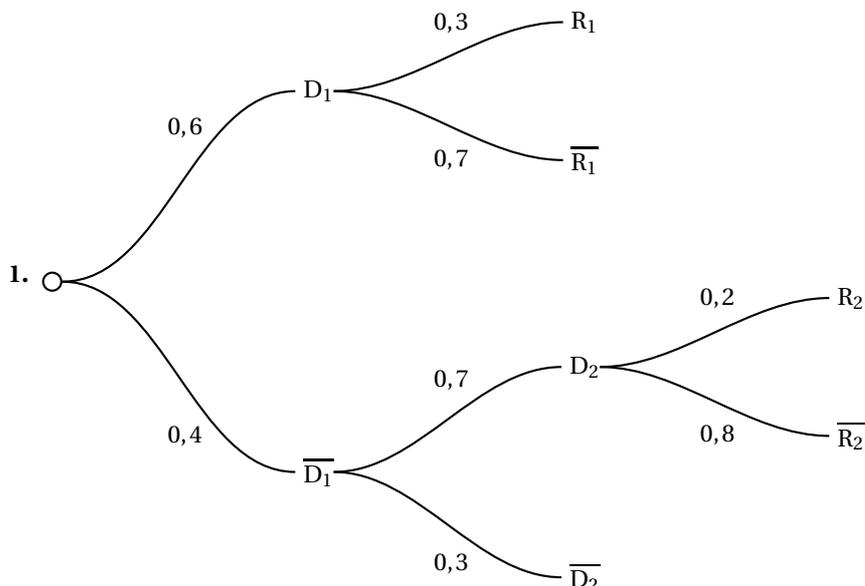
Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2005

EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats



En suivant l'arbre de probabilités pondéré ci-dessus, on a $p(R_1) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$.

2. De même $p(R_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,2 = 0,056$.

Donc $p(R) = 0,18 + 0,056 = 0,236$.

3. On sait que $p_R(R_1) = \frac{p(R_1 \cap R)}{p(R)} = \frac{0,18}{0,236} \approx 0,7626 \approx 0,763$.

4. On a un schéma de Bernouilli avec $p = 0,236$ et $n = 5$, car 20 % de 25 représentent 5 personnes. Donc la probabilité d'avoir 5 réponses au questionnaire est :

$$\binom{25}{5} \times (0,236)^5 \times (1 - 0,236)^{20} \approx 0,179.$$

EXERCICE 2

3 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$$1. M = N \iff z = z^2 \iff z(1 - z) = 0 \iff \begin{cases} z = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

$$M = P \iff z = z^3 \iff z(1 - z^2) = 0 \iff z(1 + z)(1 - z) = 0 \iff \begin{cases} z = 0 \\ z = -1. \\ z = 1 \end{cases}$$

Conclusion si $M \in \mathcal{E}$, z , z^2 et z^3 sont des complexes distincts et par conséquent M, N et P aussi.

2. a. MNP est rectangle en P si et seulement si $MP^2 + PN^2 = MN^2 \iff$
 $|z^3 - z|^2 + |z^2 - z^3|^2 = |z^2 - z|^2 \iff |z(1 - z^2)|^2 + |z^2(1 - z)|^2 = |z(z - 1)|^2 \iff$
 $|z|^2 |1 - z^2|^2 + |z|^4 |1 - z|^2 = |z|^2 |1 - z|^2 \iff (\text{car } z \neq 0) |1 - z^2|^2 + |z|^2 |1 - z|^2 = |1 - z|^2 \iff (\text{car } z \neq 1) |1 + z|^2 + |z|^2 = 1.$

b. En reprenant l'égalité précédente : $|1+z|^2 + |z|^2 = 1 \iff (1+z)(\overline{1+z}) + z\bar{z} = 1 \iff (1+z)(1+\bar{z}) + z\bar{z} = 1 \iff z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 + z\bar{z} = 1 \iff 2z\bar{z} + z + \bar{z} = 0 \iff z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \iff \left(z + \frac{1}{2}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \iff \left(z + \frac{1}{2}\right)\left(\overline{z + \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$.

c. Soit C le point d'affixe $-\frac{1}{2}$. La condition précédente $\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(\overline{z + \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$ entraîne que $\left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \iff CM = \frac{1}{2}$. Géométriquement M appartient au cercle de centre C et de rayon $\frac{1}{2}$, M étant distinct de O et de A (qui sont sur le cercle et de B.

Conclusion : l'ensemble \mathcal{C} est le cercle de centre C de rayon $\frac{1}{2}$, privé de O et de A.

3. a. On a $M(z) \in \mathcal{C}$ et $z = re^{i\alpha}$.

$$\text{Alors } z^3 > 0 \iff r^3 e^{i3\alpha} > 0 \iff e^{i3\alpha} > 0 \iff \begin{cases} \cos(3\alpha) > 0 \\ \sin(3\alpha) = 0 \end{cases} \iff$$

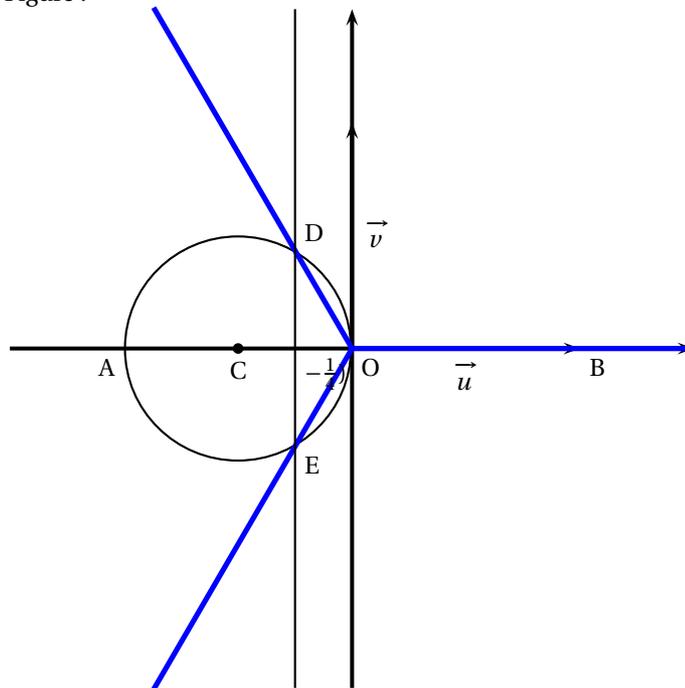
$$\begin{cases} \cos(3\alpha) > 0 \\ 3\alpha = 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(3\alpha) > 0 \\ \alpha = 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \cos(3\alpha) > 0 \\ \alpha = 0 \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \text{ ou } -\frac{2\pi}{3} \end{cases} \iff \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \alpha = -\frac{2\pi}{3},$$

car dans ces trois cas le cosinus est positif (et même égal à 1).

L'ensemble \mathcal{F} cherché est donc la réunion des trois demi-droites d'origine O faisant respectivement avec l'axe (O, \vec{u}) un angle de 0 , $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$, privées du points O.

b. Figure :



c. D'après les questions 2. a. et 2. b. il faut que M appartienne aux deux ensembles \mathcal{C} et \mathcal{F} : graphiquement on voit qu'il y a deux solutions.

il faut donc que $r > 0$, $\alpha \in \left\{-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}\right\}$ et que $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$.

- Si $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$, $z = re^{-\frac{2i\pi}{3}}$, $z+1 = -\frac{r}{2} + 1 + \frac{ir\sqrt{3}}{2}$.
 Donc $|z+1|^2 + |z|^2 = 1 \iff \left(-\frac{r}{2} + 1\right)^2 + \frac{3r^2}{4} + r^2 = 1 \iff 2r^2 - r + 1 = 1$
 $1 \iff 2r^2 - r = 0 \iff r = \frac{1}{2}$. Première solution le point E d'affixe
 $-\frac{1}{2}e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$.
- Si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, le calcul de r est le même; on trouve le point D d'affixe
 $-\frac{1}{2}e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.
- Si $\alpha = 0$, $z = r$, $|z+1|^2 + |z|^2 = 1 \iff (r+1)^2 + r^2 = 1 \iff 2r^2 + r = 0$
 $0 \iff r = -\frac{1}{2}$ qui n'a pas de solution. Il y a donc comme prévu deux solutions : les points D et E.

EXERCICE 2

3 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

- Si $a = 2p$ et $b = 2q$, alors $N = a^2 - b^2 = 4p^2 - 4q^2 = 4 \times \dots$ n'est pas impair ;
 Si $a = 2p+1$ et $b = 2q+1$, alors $N = (2p+1)^2 - (2q+1)^2 = (2p+2q+2)(2p-2q)$
 n'est pas impair.
 Conclusion a et b n'ont pas la même parité.
- On a par définition de N , $a > b$. Or $N = (a+b)(a-b)$, donc est le produit de deux naturels. En posant $a+b = p$ et $a-b = q$, $N = p \times q$. D'après la question 1, a et b sont de parités contraires, donc $a+b = p$ et $a-b = q$ sont impairs et leur produit aussi.

Partie B

- Les restes de X sont les naturels de 0 à 8. On calcule les restes de X^2 :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1

- On a $250\,507 = 9 \times 27\,834 + 1$, donc $250\,507 \equiv 1 \pmod{9}$.
 D'après la question précédente et puisque $a^2 - 250\,507 = b^2$, les restes modulo 9 de b^2 sont ou 0, ou 1, ou 4 ou 7.
 On en déduit que les restes modulo 9 de $a^2 = 250\,507 + b^2$ sont 1, 2, 5 ou 8. Mais ces trois dernières valeurs sont interdites d'après la question 1. a. Donc le reste modulo 9 de a^2 est égal à 1. Toujours d'après la question 1. a., on en déduit que les restes possibles de a sont 1 ou 8.
- Si $(a; b)$ vérifie l'équation $a^2 - 250\,507 = b^2$, alors $a^2 = 250\,507 + b^2 \geq 250\,507 \iff a \geq \sqrt{250\,507} \iff a \geq 501$.
 - $(501; b)$ solution de (E) si $501^2 - 250\,507 = b^2 \iff 494 = b^2$ qui n'a pas de solution dans \mathbb{N} , car $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$.
 Il n'y a pas de couple solution de la forme $(501; b)$.
- On a $503 \equiv 8 \pmod{9}$ et $505 \equiv 1 \pmod{9}$. D'après la question précédente, on peut dire que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
 - $(505 + 9k; b)$ solution de (E) si et seulement si $505^2 + 81k^2 + 9\,090k - 250\,507 = b^2 \iff 255\,025 + 81k^2 + 9\,090k - 250\,507 = b^2 \iff 4\,518 + 81k^2 + 90\,90k = b^2$.
 Pour $k = 0$, 4 518 n'est pas un carré;

Pour $k = 1$, $4\,518 + 81 + 9\,090 = 13\,689 = 117^2 = b^2 \iff b = 117$. Donc le couple $(514 ; 117)$ est un couple solution.

Partie C

- D'après la question précédente $250\,507 = 514^2 - 117^2 = (514+117)(514-117) = 631 \times 397$. (Effectivement $250\,507$ n'est pas premier.)
- 631 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$: il est premier :
 397 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$: il est premier.
Conclusion 631 et 397 sont premiers entre eux.
- D'après la question précédente la seule écriture primaire de $250\,507$ est 631×397 . Il n'existe pas d'autre écriture de ce nombre si ce n'est l'écriture triviale $1 \times 250\,507$. L'écriture précédente est donc unique.

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

- Par définition de A_1 centre de gravité du triangle BCD , donc isobarycentre des points B, C et D $\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{A_1D} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

$$\text{Calculons } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{-AC^2 + AD^2}{3} = 0, \text{ car } AC = AD.$$

Un calcul analogue montre que $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Conclusion : la droite (AA_1) orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCD) est orthogonale à ce plan.

- La droite (AB) est perpendiculaire à (AC) et à (AD) , dont est perpendiculaire au plan (ACD) . Le volume du tétraèdre est donc égal à

$$V = AB \times S(ACD) = a \times \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

D'après la question précédente on peut également utiliser la hauteur AA_1 et la base (BCD) :

$$V = AA_1 \times S(BCD) = AA_1 \times \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} \times a\sqrt{2} = AA_1 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{On a donc } a \times \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{2} = AA_1 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \iff AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

- Le point G vérifie : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \iff 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Or on a vu que $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, donc $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$ qui signifie que G appartient à la droite (AA_1) (et même que G a pour abscisse $\frac{3}{4}$ si le repère est (A, A_1) .)

$$\text{On en déduit en prenant les normes que } AG = \frac{3}{4} \times \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

I est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

D'autre part $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.

$$\text{Donc } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \iff 4MG = 4MI \iff MG = MI.$$

Conclusion : l'ensemble des points M cherchés est le plan médiateur du segment $[BC]$.

- Par définition de H : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GH} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

$$\text{Donc } 4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \iff \overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.$$

$$\text{On a } HC^2 - HD^2 = (\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD})(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HD}).$$

Or $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, mais par définition du point H,

$$\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{GA}.$$

Donc $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$ (d'après la question précédente).

D'autre part $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DC}$.

$$\text{Conclusion : } HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC}.$$

- b.** On a vu que [BA] est hauteur pour la base (ACD), donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, donc $HC^2 - HD^2 = 0 \iff HC = HD$

EXERCICE 4

7 points

Commun à tous les candidats

I. Première partie

1. On a $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$ car $1+x > 0$. La fonction f est décroissante à partir de la valeur $f(0) = \ln 1 - 0 = 0$. Donc f est négative et $f(x) \leq 0 \iff \ln(1+x) - x \leq 0 \iff \ln(1+x) \leq x$.

$$\text{D'autre part } g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{(x-1)(x+1)+1}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0.$$

La fonction g est donc croissante à partir de la valeur $g(0) = \ln 1 - 0 + \frac{0}{2} = 0$.

Donc g est positive et $g(x) \geq 0 \iff \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \iff x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

2. Finalement, en regroupant les deux inégalités pour $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

II. Deuxième partie

1. Initialisation : $u_1 = \frac{3}{2} > 0$: vrai ;

Hérédité : supposons que $u_n > 0$; alors $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ car les deux facteurs sont supérieurs à zéro.

On a donc démontré par récurrence que $u_n > 0$ si $n > 0$.

2. Initialisation : $u_1 = \ln\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) = \ln \frac{3}{2}$: vrai ;

Hérédité : supposons que $\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$; alors

par définition de la suite : $\ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) +$

$$\dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Conclusion on a démontré par récurrence que pour $n > 0$,

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

3. Quel que soit le naturel $n > 0$, $\frac{1}{2^n} > 0$; on peut donc utiliser l'encadrement démontré dans la première partie :

$$\begin{array}{rcccl} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} & \leq & \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) & \leq & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^2} & \leq & \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) & \leq & \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^3} & \leq & \ln\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) & \leq & \frac{1}{2^3} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^n} & \leq & \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) & \leq & \frac{1}{2^n} \end{array}$$

Tous les termes sont positifs : on peut donc ajouter ces inégalités membres à membres pour obtenir :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n.$$

4. S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

De même T_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

$$T_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right).$$

Comme $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ sont compris entre -1 et 1 , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{3}$.

5. a. On a démontré que si $n > 0$, alors $u_n > 0$. On peut donc écrire que $\frac{u_{n+1}}{u_n} =$

$$1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1.$$

On a donc pour tout $n > 0$, $u_{n+1} > u_n$: la suite $(u_n)_{n>0}$ est strictement croissante.

- b. On a démontré que $\ln u_n \leq S_n \iff u_n \leq e^{S_n}$ (par croissance de la fonction exponentielle.)

Mais S_n est majorée par 1 ; donc $u_n \leq e^1$ ou $u_n \leq e$.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante et majorée : elle est donc convergente vers une limite ℓ .

- c. Cette limite est positive comme tous les termes de la suite ; d'autre part par continuité de la fonction \ln , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = \ln \ell$.

À partir de l'encadrement de $\ln u_n$ démontré à la question 3, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - \frac{1}{2}T_n \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

$$\text{c'est-à-dire : } 1 - \frac{1}{6} \leq \ln \ell \leq 1 \iff \frac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1.$$

Finalement, on obtient l'encadrement :

$$e^{\frac{5}{6}} \leq \ell \leq e.$$