Baccalauréat S (obligatoire) Nouvelle Calédonie mars 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Commun tous les candidats

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n$ est égal à :	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$	☐ Faux ☒ Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta^n\right)$	☒ Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)$	☐ Faux ☒ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$	☒ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$	☐ Faux ☒ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2}$	☒ Faux ☐ Vrai
Q3	Soit z un complexe tel que $z=x+\mathrm{i}y$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	☐ Faux ☒ Vrai
		$-y^2$	☒ Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐ Faux ☒ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a}=\mathrm{i}\sqrt{3}$, alors :	BC = 2 AC	☐ Faux ☒ Vrai
		$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	☒ Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\mathrm{CA}^2$	☐ Faux ☒ Vrai

EXERCICE 2 **5 points**

1. Les contrôles étant indépendants, on a un schéma de Bernouilli de paramètre p (probabilité d'être contrôlé) et $n=40$. On a donc $P(X=k)=\binom{40}{k}p^k(1-p)^{40-k}$.

2. $p=\dfrac{1}{20}$.

a. On a $E(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{i=40}E(X_i)=np=40\times\dfrac{1}{20}=2$.

b. $P(X=0)=\binom{40}{0}\left(\dfrac{1}{20}\right)^0\left(1-\dfrac{1}{20}\right)^{40}=\left(\dfrac{19}{20}\right)^{40}$.

$P(X=1)=\binom{40}{1}\left(\dfrac{1}{20}\right)^1\left(1-\dfrac{1}{20}\right)^{39}=40\times\dfrac{1}{20}\left(\dfrac{19}{20}\right)^{39}=2\times\left(\dfrac{19}{20}\right)^{39}$.

$P(X=2)=\binom{40}{2}\left(\dfrac{1}{20}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{20}\right)^{38}=20\times39\times\dfrac{1}{400}\left(\dfrac{19}{20}\right)^{38}=\dfrac{39}{20}\times\left(\dfrac{19}{20}\right)^{39}$.

c. La probabilité d'être contrôlé au plus deux fois est $P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\approx 0,6767(3)$.

3. S'il ne fait pas prendre, le fraudeur gagne 400 €, mais s'il se fait prendre i fois (avec $0\leqslant i\leqslant 40$), il devra débourser $100\times i$ €. On a donc $Z=400-100X$.
Avec $p=\dfrac{1}{5}$, on a $E(Z)=E(400-100X)=400-100E(X)=400-100\left(40\times\dfrac{1}{5}\right)=-400$. En moyenne sur 40 trajets il devra payer 400 €…

4. **a.** $P(X \leqslant 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \binom{40}{0}(1-p^{40} + \binom{40}{1}p(1-p)^{39} + \binom{40}{2}p^2(1-p)^{38} = (1-p)^{38}\left[(1-p)^2 + 40p(1-p) + 780p^2\right] = (1-p)^{38}\left[741p^2 + 38p + 1\right]$.

b. On a $f'(x) = 38 \times (-1)(1-x)^{37}\left(741x^2 + 38x + 1\right) + (1-x)^{38}(1482x + 38) = (1-x)^{37}\left[38(-741x^2 - 38x - 1) + (1-x)(1482x + 38)\right] = (1-x)^{37}\left[-20158x^2 - 1444x - 38 + 1482x + 38 - 1482x^2 - 38x\right] = -21640x^2(1-x)^{37} = 21640x^2(x-1)(1-x)^6$.

$f'(x)$ est du signe de $(x-1)$ donc négative sur $[0\,;\,1]$, et f est décroissante sur cet intervalle de 1 à 0 ; étant continue car dérivable, le théorème de la bijection démontre qu'il existe un réel unique $0 < x_0 < 1$ tel que $f(x_0) = 0,01$.

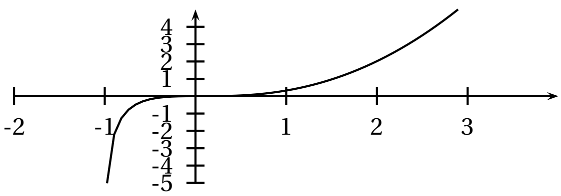
La calculatrice permet de trouver $\dfrac{19}{100} < x_0 < \dfrac{19+1}{100}$. On a donc $n = 19$.

c. On a $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X) \leqslant 2)$. Donc $P(X \geqslant 3) \geqslant 0,99 \iff 1 - P(X \leqslant 2) \geqslant 0,99 \iff P(X \leqslant 2) \leqslant 0,01$. D'après la question précédente et la décroissance de la fonction f, il faut donc que $p \geqslant x_0$.

La plus petite valeur de p est donc x_0.

EXERCICE 3 — 6 points

1.



2. **a.** Sur l'intervalle considéré (en fait sur la calculatrice $[-1\ ;\ 3]$ la fonction semble être croissante.

b. La fonction semble s'annuler uniquement pour $x = 0$.

a. Pour$x > -1$, $f'(x) = 2x - 2,2 + \dfrac{2,2}{x+1} = \dfrac{(2x-2,2)(x+1)+2,2}{x+1} = \dfrac{2x^2-0,2x}{x+1} = \dfrac{x(2x-0,2)}{x+1}$. Le dénominateur étant positif, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x(2x-0,2)$ donc positif sauf entre ses racines 0 et 0,1.

b. On a $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$ et comme $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{2,2}{x}\right) + 2,2\ln(x+1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit le tableau de variations :

x	-1		0		$0,1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↘	$\approx -0,0003$	↗	$+\infty$

c. On a bien $f(0) = 0$, mais de plus sur l'intervalle $[0,1\ ;\ +\infty[$ la fonction est continue et croissante de $f(0,1) < 0$ à $+\infty$. Il existe donc un réel unique x_0 tel que $f(x_0) = 0$. Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions : 0 et x_0.

d. Les résultats obtenues par étude de la fonction contredisent lesconjectures tirées de l'examen de la calculatrice.

3. **a.** On peut prendre $-0,0018 \leqslant y \leqslant 0,00111$ en utilisant la fonction Table et en calculant $f(-0,1)$ et $f(0,2)$.

   b. On obtient $f(0,15) < 0$ et $f(0,16) > 0$. On a donc $0,15 < \alpha < 0,16$. L'approximation décimale par défaut à 10^{-2} de α est $0,15$.

4. **a.** Soit $F'(x) = x^2 - 2,2x - 2,2 + 2,2\ln(x+1) + 2,2\dfrac{x+1}{x+1} = f(x)$, donc F est une primitive de f.

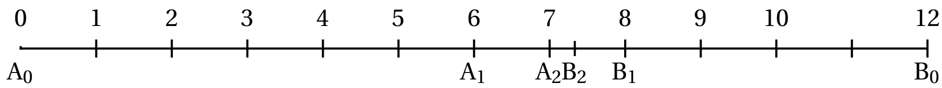
   b. Sur l'intervalle $[0~;~\alpha]$, $f(x) \leqslant 0$, donc l'intégrale représente l'opposé de l'aire de la surface limitée par le graphe de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

   c. D'après le **5. a.**, $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\alpha) - F(0) = \frac{\alpha^3}{3} - 1,1\alpha^2 + 2,2(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$.
   Or $f(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 2,2\alpha + 2,2\ln(\alpha+1) = 0 \iff 2,2\ln(\alpha+1) = -\alpha^2 + 2,2\alpha$.
   Donc $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha^3}{3} - 1,1\alpha^2 + (\alpha+1)\left(-\alpha^2 + 2,2\alpha\right) = \frac{\alpha^3}{3} - 1,1\alpha^2 - 2,2\alpha - \alpha^3 + 2,2\alpha^2 - \alpha^2 + 2,2\alpha = -\frac{2}{3}\alpha^3 + 0,1\alpha^2$.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A



1. Il semble que pour n assez grand les points A_n et B_n se rapprochent d'une même position limite.
2. On a $A_n = \text{milieu}[A_nB_n] \iff u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

   D'autre part $B_{n+1} = \text{bar.}\{(A_n,~1)~;~(B_n,~2)\} \iff v_{n+1} = \dfrac{1 \times u_n + 2 \times v_n}{1+2} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

Partie B

1. Soit $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \dfrac{1}{6}(v_n - u_n) = \dfrac{1}{6}w_n$.

   La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$. Or $w_0 = v_0 - u_0 = 12 - 0 = 12$, donc $\mathrm{w}_n = 12 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$. Tous les termes de la suite sont positifs et la raison étant comprise entre -1 et 1, cette suite converge vers 0.
2. Calculons $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{-u_n + v_n}{2} = \dfrac{1}{2}w_n > 0$ d'après la question précédente. La suite (u_n) est donc croissante.

   De même $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} v_n = \dfrac{u_n - v_n}{3} = -\dfrac{1}{3}w_n < 0$, d'après la question précédente.
3. D'après les deux questions précédentes les deux suites sont adjacentes car l'une est croissante, l'autre décroissante et la limite de leur différence est nulle. Elles convergent toutes les deux vers la même limite ℓ.

4. On a $t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = u_n + v_n + u_n + 2v_n = 2u_n + 3v_n = t_n$. cette égalité vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (t_n) est constante. En particulier $t_n = t_0 = 2u_0 + 3v_0 = 3 \times 12 = 36$.

Partie C

On a le système $\left\{\begin{array}{rcl} -u_n + v_n & = & 12 \times \dfrac{1}{6^n} \\ 2u_n + 3v_n & = & 36 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2u_n + 2v_n & = & 24 \times \dfrac{1}{6^n} \\ 2u_n + 3v_n & = & 36 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} u_n & = & +v_n - 12 \times \dfrac{1}{6^n} \\ 5v_n & = & 36 + 24 \times \dfrac{1}{6^n} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} u_n & = & +v_n - 12 \times \dfrac{1}{6^n} \\ v_n & = & \dfrac{36}{5} + \dfrac{24}{5} \times \dfrac{1}{6^n} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} u_n & = & \dfrac{36}{5} - \dfrac{36}{5} \times \dfrac{1}{6^n} \\ v_n & = & \dfrac{36}{5} + \dfrac{24}{5} \times \dfrac{1}{6^n} \end{array}\right.$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{36}{5} = 7,2$.

La position limite des points A_n et B_n quand n tend vers plus l'infini est donc le point d'abscisse 7,2.