Baccalauréat S Polynésie 9 juin 2005

Exercice 1 **3 points**

1. A et B sont indépendants, donc $p(\text{A} \cap \text{B} = p(\text{A}) \times p() = 0,02 \times 0,1 = 0,002$.
   On a $p(\text{C}) = 1 - p(\text{A} \cup \text{B}) = 1 - \left[p(\text{A}) + p(\text{B} - p(\text{A} \cup \text{B}\right] = 1 - 0,02 - 0,1 - 0,002 = 0,882$.
2. On a p(avoir le défaut a seul) $= 0,02 - 0002 = 0,018$.
   De même p(avoir le défaut b seul) $= 0,1 - 0002 = 0,098$.
   Donc $p(\text{D}) = 0,018 + 0,098 = 0,116$.
3. On a une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,882$.
   $p(\text{E}) = p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{5}{4}0,882^4 \times 0,118 + \binom{5}{5}0,882^5 \approx 0,890\ 8$ soit $p(\text{E}) \approx 0,891$à 10^{-3} près.

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. A(3 ; 1 ; 3) et B(−6 ; 2 ; 1). Si G est le barycentre du système {(A, 4) ; (B, −1)} (qui existe puisque $4 - 1 \neq 0$) $\left\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = 2 \iff \left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 2 \iff \text{G}M = \dfrac{2}{3}$.
   L'ensemble est donc une sphère de centre G de rayon $\dfrac{2}{3}$. Réponse **b.**.
2. Soit $(x_\text{H}\ ;\ y_\text{H}\ ;\ z_\text{H}$ les coordonnées du point H. Le vecteur $\overrightarrow{\text{AH}}$ est colinéaire au vecteur normal au plan de coordonnées (1 ; 2 ; 2). Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
   $\left\{\begin{array}{rcl} x_\text{H} - 3 &=& \alpha \\ y_\text{H} - 1 &=& 2\alpha \\ z_\text{H} - 3 &=& 3\alpha \end{array}\right.$ et comme $\text{H} \in \mathscr{P}$, on a $3 + \alpha + 2(1 + 2\alpha) + 2(3 + 3\alpha) = 5 \iff \alpha = -\dfrac{2}{3}$.
   On a donc $\text{H}\left(\dfrac{7}{3}\ ;\ -\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right)$. Réponse **c.**
3. On calcule la distance du point B au plan $\mathscr{P}$:
   $d(\text{B},\ \mathscr{P}) = \dfrac{|-6 + 4 + 2 - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \dfrac{5}{3}$. Cette distance étant supérieure au rayon 1 la sphère et le plan ne sont pas sécants. Réponse **c.**.
4. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont respectivement pour vecteurs directeurs (1 ; 2 ; −1) et (2 ; 1 ; 1). Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.
   La droite $\mathscr{D}$ a pour équations paramétriques $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3 + t' \\ y &=& 1 + 2t' \\ z &=& 3 - t' \end{array}\right.$ $(t' \in \mathbb{R})$. Les droites sont sécantes s'il existe t ett' tels que : $\left\{\begin{array}{rcl} 3 + 2t &=& 3 + t' \\ 3 + t &=& 1 + 2t' \\ t &=& 3 - t' \end{array}\right. \iff$
   $\left\{\begin{array}{rcl} 2t &=& t' \\ 3 &=& 4t' \\ t &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t' &=& 2 \\ t' &=& \frac{3}{4} \\ t &=& =1 \end{array}\right.$. Ce système n'admet pas de solution, donc les droites ne sont pas sécantes. Réponse **c.**.
5. Les points équidistants de A et B est le plan médiateur de [AB] qui coupe [AB] en son milieu $\text{I}(\left(-\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}\,(-9\ ;\ 1\ ;\ -2)$ est un vecteur normal à ce plan et les points M de ce plan médiateur vérifient : $\overrightarrow{\text{I}M} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 0 \iff -9\left(x + \dfrac{3}{2}\right) + 1\left(y - \dfrac{3}{2}\right) - 2(z - 2) = 0 \iff -9x + yb - 2z - 11 = 0$. Réponse **b.**.
   On pouvait également partir de $M\text{A}^2 = M\text{b}^2$.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On calcule $u_1 = 64$ $u_2 = 314,$ $u_3 = 1\ 564,$ $u_4 = 7\ 814$
On peut conjecturer que $u_{2k} = \dots 14$ et $u_{2k+1} = \dots 64$.

2. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36 = u_n + 24u_n + 36$.
Or $24u_n + 36 \equiv 0 \quad [4]$, donc $u_{2n} \equiv u_n \quad [4]$.
On en déduit que $u_{2k} \equiv u_0 = 4 \times 3 + 2$. Donc, pour tout naturel k, $u_{2k} \equiv 2 \quad [4]$.
De même $u_{2k+1} \equiv u_1 = 64 = 4 \times 16$; donc $u_{2k+1} \equiv 0 \quad [4]$, pour tout naturel k.

3. **a.** Initialisation : $2u_0 = 28 = 5^2 + 3$: vraie.
Hérédité : supposons que pour l'entier n, on ait $2u_n = 5^{n+2} + 3$. Calculons $2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5 \times 2u_n - 12 = 5\left(5^{n+2} + 3\right) - 12 = 5^{n+3} + 3$. La relation est donc vraie au rang $(n+1)$.
On a donc démontré par récurrence que pour tout naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. On a $2u_n = 5^{n+2} + 3 = 5^2 \times 5^n + 3 = 25 \times 5^n + 28 - 25 = 25\,(5^n - 1) + 28$.
Or $5^n - 1$ est divisible par $5 - 1 = 4$ (en général $x^n - 1$ est divisible par $x - 1$).
Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5^n - 1 = 4k$ et finalement :
$2u_n = 100k + 28 \iff 2u_n \equiv 28 \quad [100]$.

4. Si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ alors $2u_{2p} = 5^{2p+2} + 3 = (5^2) \times 5^{p+1} + 28 - 25 = 25\left(5^{2p} - 1\right) + 28$. Or $5^{2p} - 1 = \left(5^2\right)^p - 1 = 25^p - 1$ est divisible par $25 - 1 = 24 = 8 \times 3$ donc par 8. Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que $25^p - 1 = 8q$.
Finalement $2u_{2p} = 25 \times 8q + 28 \iff 2u_{2p} = 200q + 28 \iff u_{2p} = 100q + 14$.
Les nombresu_{2p} se terminent donc par 14.
Si $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{Z}$ alors $2u_{2p+1} = 5^{2p+3} + 3 = 5^3 \times 5^{2p} + 128 - 125 = 125\left(5^{2p} - 1\right) + 128 = 125\,(25^p - 1) + 128$.
On a vu que $25^p - 1 = 8q$, d'où $2u_{2p+1} = 125 \times 8q + 128 \iff 2u_{2p+1} = 1000q + 128 \iff u_{2p+1} = 500q + 64 \iff u_{2p+1} = 100q' + 64$.
Les nombres u_{2p+1} se terminent donc par 64.
On pouvait également écrire que $u_{2p+1} = 5u_{2p} - 6 = 5(100q + 14) - 6 = 100 \times 5q + 64$.

5. On utilise plusieurs fois la propriété : PGCD$(a\ ;\ b)$ = PGCD$(a\ ;\ a - b)$ si $a \geqslant b$.
Donc PGCD$(u_{n+1}\ ;\ u_n)$ = PGCD$(5u_n - 6\ ;\ u_n) = \cdots =$ PGCD$(u_n - 6\ ;\ u_n)$ = PGCD$(u_n\ ;\ 6) \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 6\}$.
Or 6 et 3 ne divisent pas u_0, mais tous les termes sont pairs.
Conclusion : PGCD$(u_{n+1}\ ;\ u_n) = 2$.

Exercice 3 — 7 points

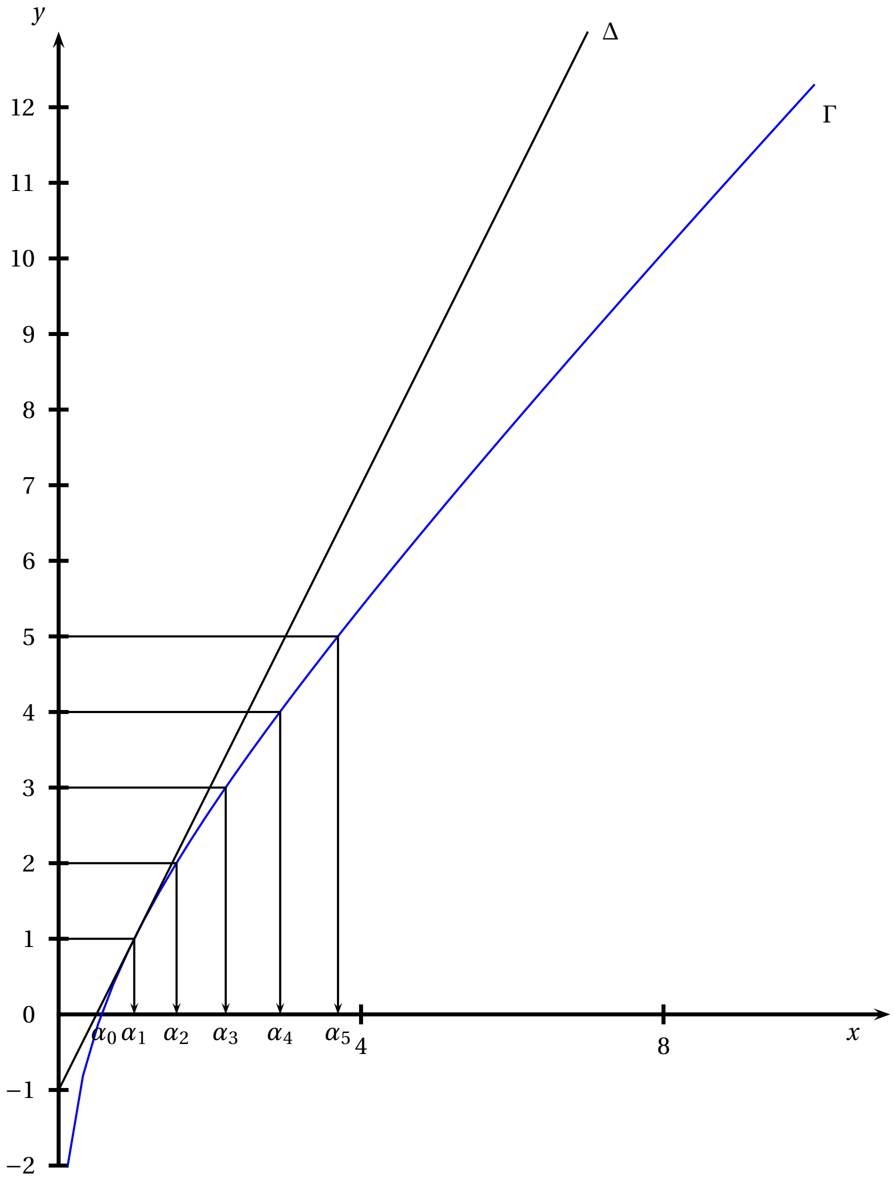
Partie A

1. **a.** On a de façon évidente $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 1 > 0$. La fonction est donc croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** La fonction f est continue et croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$; de plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc f est une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc pour tout naturel n, il existe un unique antécédent α_n tel que $f(\alpha_n) = n$.

b. Figure



c. On a $\alpha_1 + \ln \alpha_1 = 1$. Le graphe fait apparaître la solution évidente $\alpha_1 = 1$.

d. De $f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1} = n+1$ on déduit par différence $f(\alpha_{n+1}) - f(\alpha_n) = 1 > 0$ qui est équivalent par la croissance de$f$ à $\alpha_{n+1} - \alpha_n > 0 \iff \alpha_{n+1} > \alpha_n$ qui démontre que la suite (α_n) est croissante.

3. **a.** $M(x\,;\,y) \in \Delta \iff \dfrac{y-1}{x-1} = f'(1) = 2 \iff y = 2x - 1$ (pour $x \neq 1$).

b. $h(x) = \ln x - x + 1$; $h'(x)\dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$ qui est du signe de $1 - x$. La fonction est donc croissante sur $]0\,;\,1]$, puis décroissante. Elle présente îdonc un maximum pour $x = 1$ et $h(1) = 0$.
Conclusion : la fonction h est négative sur $]0\,;\,+\infty[$.
Or $h(x) = x + \ln x - (2x - 1)$, donc $h(x) \leqslant 0 \iff x + \ln x \leqslant 2x - 1$, ce qui signifie que pour tout réel positif, la courbe Γ est en dessous de Δ.

c. Cf.figure.

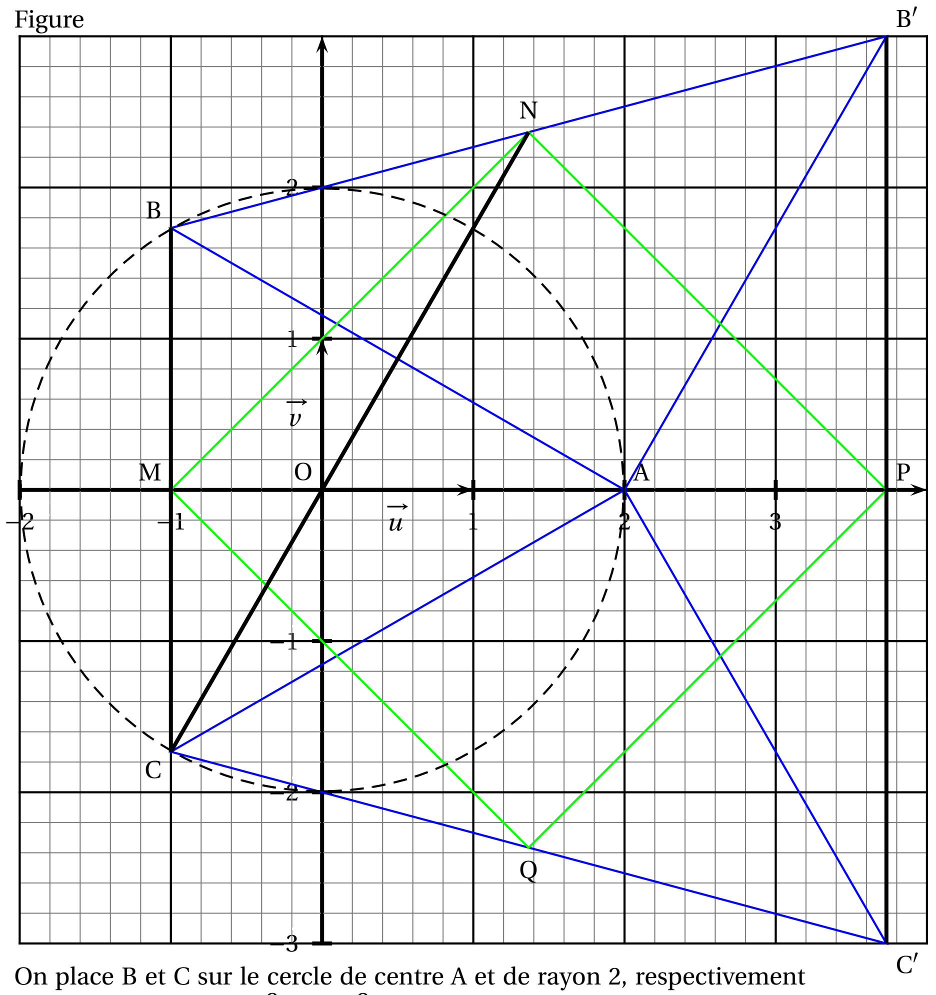
4. Pour tout naturel n on a d'après la question précédente : $\ln \alpha_n + \alpha_n - 2\alpha_n + 1 \leqslant 0 \iff n - 2\alpha_n + 1 \leqslant 0 \iff \dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.
On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2} = +\infty$, donc par comparaison $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

Partie B

1. **Démonstration de cours : suite croissante non majorée**
   Soit M un réel fixé ; la suite (u_n) étant non majorée, il existe un naturel n_0 tel que $u_{n_0} > M$ et par croissance de la suite $n > n_0 \Longrightarrow u_n > u_{n_0} > M$.
   Cette propriété étant vraie pour tout réel M, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
2. Si la suite $\left(\beta_n\right)$ est majorée, étant croissante elle converge vers un réel ℓ. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \ell$, mais par continuité de la fonction g, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(\beta_n) = g(\ell)$. Or $g(\beta_n) = n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = g(\ell) = +\infty$, ce qui est contradictoire.
   Conclusion : la suite $\left(\beta_n\right)$ non majorée et croissante tend vers plus l'infini d'après la question **1.**.

Exercice 4 **5 points**

1. $z^3 = 8 \iff z^3 = 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} \iff z = 2\mathrm{e}^{2\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} \quad \bmod 2\dfrac{\mathrm{i}\pi}{3}$.
   Il y a donc trois solutions : $z_1 = 2\mathrm{e}^{2\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$;
   $z_2 = 2\mathrm{e}^{4\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = 2\left(-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$;
   $z_3 = 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 2$.
   $S = \left\{2~;~-1+\mathrm{i}\sqrt{3}~;~-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.
2. **a.** Figure



   b. On place B et C sur le cercle de centre A et de rayon 2, respectivement avec un argument de $\dfrac{2\pi}{3}$ et $-\dfrac{2\pi}{3}$. B′ et C′ se construisent avec les triangles rectangles ABB′ (indirect) et ACC′ (direct).

   c. La rotation r est définie par $z' - 2 = \mathrm{i}(z-2)$, donc $z_{\mathrm{C}'} = 2 + \mathrm{i}(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}-2) = 2+\sqrt{3}-3\mathrm{i}$.

d. De même la rotation r' est définie par
$z' - 2 = -\mathrm{i}(z-2)$, donc $z_{\mathrm{B}'} = 2 - \mathrm{i}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 2) = 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.
Donc b' etc' sont bien conjuguées.
Géométriquement : les points B et C sont symétriques autour de (Ox) ; par des considérations d'angles, leurs images par les deux rotations sont elles aussi symétriques autour de (Ox).

3. **a.** $n = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.

b. On constate que $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ ce qui signifie que les vecteurs sont colinéaires, donc que les points O, N et C sont alignés.

c. Calcul de $q = \dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - 3\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$.
Remarque : géométriquement Les segments [BB$'$] et [CC$'$] étant symétriques autour de (Ox), leurs milieux le sont aussi, donc $q = \overline{n}$.

$q+1$ étant différent de zéro, calculons $\dfrac{n+1}{q+1} = \dfrac{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) + 1}{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) + 1} =$

$\dfrac{1 + 2 + \sqrt{3} + (\sqrt{3}+3)\mathrm{i}}{1 + 2 + \sqrt{3} - (\sqrt{3}+3)\mathrm{i}} = \dfrac{3 + \sqrt{3} + (\sqrt{3}+3)\mathrm{i}}{3 + \sqrt{3} - (\sqrt{3}+3)\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}[(\sqrt{3}+3 - \mathrm{i}(3+\sqrt{3})]}{(\sqrt{3}+3 - \mathrm{i}(3+\sqrt{3})} = \mathrm{i}$.
On a donc bien démontré que $n+1 = \mathrm{i}(q+1)$.
Cette égalité s'écrit encore $n - (-1) = \mathrm{i}[q - (-1)]$ qui montre que N est l'image de Q dans la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; donc le triangle MQN est un triangle rectangle isocèle direct, donc MNQ un triangle rectangle isocèle indirect.

d. Dans le triangle BB$'$C, N est le milieu de [BB$'$] et M est le milieu de [BC], donc la droite (MN) est parallèle à la droite (B$'$C). De même la droite (PQ) est parallèle à la droite (B$'$C) et par transitivité, les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.
On démontre de la même façon que les droites (NP) et (MQ) sont parallèles.
Conclusion : le quadrilatère (MNPQ) a ses côtés opposés parallèles (c'est un parallélogramme), ayant deux côtés consécutifs de même longueur MN = MQ (c'est un losange) et possède un angle droit (c'est donc un rectangle) et finalement un carré.