

Exercice 1

On ne demandait pas de justification ; celles-ci sont données à but pédagogique

1. L'équation $2x + 2y - z - 11 = 0$ est l'équation d'un plan \mathcal{P} .
- $2x_A + 2y_A - z_A - 11 = 2 \times 2 + 2 \times 4 - 1 - 11 = 0$ donc A appartient à \mathcal{P} .
 - $2x_B + 2y_B - z_B - 11 = 2 \times 0 + 2 \times 4 - (-3) - 11 = 0$ donc B appartient à \mathcal{P} .
 - $2x_C + 2y_C - z_C - 11 = 2 \times 3 + 2 \times 1 - (-3) - 11 = 0$ donc C appartient à \mathcal{P} .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires. Les trois points A, B et C ne sont pas alignés et appartiennent au plan \mathcal{P} , donc ce plan est le plan (ABC). L'affirmation est donc **vraie**.

2. $2x_E + 2y_E - z_E - 11 = 2 \times 3 + 2 \times 2 - (-1) - 11 = 0$ donc E appartient à (ABC).

Le vecteur \overrightarrow{DE} a pour coordonnées : $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors : $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = -4 + 0 - 4 \neq 0$ donc les vecteurs \overrightarrow{DE} et \overrightarrow{AB} ne sont pas orthogonaux. Le point E n'est donc pas le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). L'affirmation est **fausse**.

3. $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 4 + 0 - 4 = 0$. Les deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont orthogonaux donc les droites (AB) et (CD) aussi.

L'affirmation est **vraie**.

4. Le point C n'appartient pas à la droite dont on donne la représentation paramétrique. En effet, si c'était le cas, il existerait un réel t tel que :
$$\begin{cases} -1 + 2t = 3 \\ -1 + t = 1 \\ 1 - t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 4 \end{cases},$$
 ce qui est impossible. Par conséquent, l'affirmation est

fausse.

5. $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 0 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \frac{10}{7} \overrightarrow{AI}$. Les deux vecteurs sont colinéaires, donc I appartient bien à la droite (AB). L'affirmation est **vraie**.

Il fallait donc répondre : **V-F-V-F-V**

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 e^{1-x}$.

- (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$ par le théorème de composition des limites. Comme on a aussi $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, on en déduit que : $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$.

Pour tout x , on a : $f(x) = e x^2 e^{-x} = e \frac{x^2}{e^x}$.

D'après le théorème de croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. On en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.

L'axe (Ox) est donc asymptote à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$.

- (b) f est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables ;

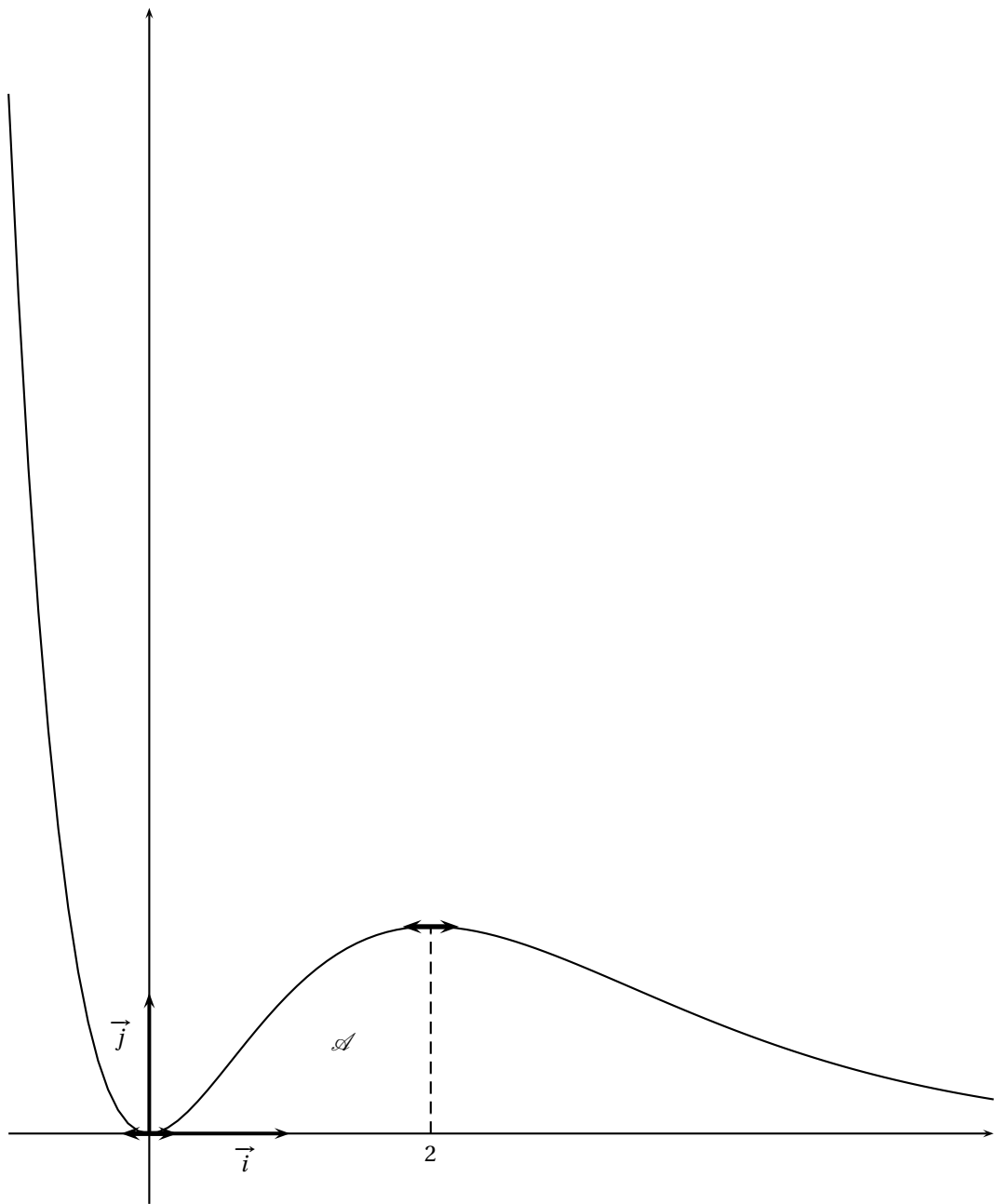
pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = 2x e^{1-x} - x^2 e^{1-x} = (2x - x^2) e^{1-x} = \boxed{x(2-x) e^{1-x}}$.

- (c) Pour tout x , $e^{1-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$ qui est strictement positif entre ses racines donc sur $]0; 2[$, nul en 0 et 2 et négatif ailleurs.

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	2
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow	\searrow
		0	$\frac{4}{e}$	0

Courbe :



2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

(a) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$.

Prenons $\begin{cases} u_{n+1}(x) &= x^{n+1} \\ v'(x) &= e^{1-x} \end{cases}$. Alors : $\begin{cases} u'_{n+1}(x) &= (n+1)x^n \\ v(x) &= -e^{1-x} \end{cases}$.

u_{n+1} et v ont des dérivées continues donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties.

On a : $I_{n+1} = \int_0^1 u_{n+1}(x)v'(x) dx = [u_{n+1}(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'_{n+1}(x)v(x) dx$
 $= [-x^{n+1}e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^n e^{1-x} dx = -1 + (n+1)I_n$.

Par conséquent, pour tout n , on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

(b) La même formule d'intégration par parties donne :

$I_1 = \int_0^1 x^1 e^{1-x} dx = [-xe^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = -1 + [-e^{1-x}]_0^1 = -1 + (-1 + e) = e - 2$.

En appliquant la formule précédente, on trouve : $I_2 = 2I_1 - 1 = 2e - 5$.

(c) On remarque que $I_2 = \int_0^1 f(x) dx$ donc comme f est une fonction positive, I_2 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe \mathcal{C} , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3. (a) Pour tout x de $[0; 1]$, on a : $0 \leq x \leq 1$ donc $-1 \leq -x \leq 0$, d'où $0 \leq 1-x \leq 1$ qui donne $1 \leq e^{1-x} \leq e$ (en appliquant la fonction exponentielle qui est croissante) et finalement $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$ (en multipliant par x^n qui est positif).

(b) En utilisant les propriétés de l'intégrale, on obtient :

$\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 ex^n dx$ soit $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$.

Par conséquent : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{e}{n+1}$ tendent vers 0 donc I_n tend aussi vers 0 (théorème des gendarmes).

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 3 (pour ceux n'ayant pas choisi la spécialité)

1. (a) Soit z un nombre complexe non nul. $z \times \frac{1}{z} = 1$ donc d'après les prérequis, $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) = 0 + 2k\pi$. Par conséquent : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$.

Alors, pour tous nombres complexes z et z' non nuls :

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + (-\arg(z')) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$.

(b) Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c .

Alors : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = (\vec{u}, \vec{AC}) - (\vec{u}, \vec{AB})$ (d'après le prérequis) $= (\vec{AB}, \vec{AC})$ (d'après la relation de Chasles).

2. Soit f l'application de $P \setminus \{O\}$ dans $P \setminus \{O\}$ qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ avec $z' = \frac{1}{\bar{z}}$.

(a) Pour tout $z \neq 0$, $\arg(z') = \arg\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = -\arg(\bar{z}) = \arg(z) + 2k\pi$. $\arg(z') = \arg(z) + 2k\pi$.

On en déduit que $(\vec{u}, \vec{OM}) = (\vec{u}, \vec{OM'}) + 2k\pi$ donc M et M' appartiennent à une même demi-droite d'origine O .

(b) $f(M) = M$ équivaut à $\frac{1}{\bar{z}} = z$ donc à $z\bar{z} = 1$ c'est-à-dire à $|z|^2 = 1$ donc à $|z| = 1$.

L'ensemble des points invariants par f est le cercle de centre O et de rayon 1.

(c) Pour tout $z \neq 0$:

$\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{\frac{1}{\bar{z}}-1}{\frac{1}{\bar{z}}-i} = \frac{1-\bar{z}}{1-i\bar{z}} = \frac{1-\bar{z}}{i(-i-\bar{z})} = \frac{1-\bar{z}}{i} \frac{1}{\bar{z}+i} = \frac{1-\bar{z}}{i} \frac{1}{\bar{z}-i} = \frac{1}{i} \frac{(z-1)}{(z-i)}$

donc $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i} \frac{(z-1)}{(z-i)}$

On en déduit que : $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = \arg\left(\frac{1}{i}\right) + \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \arg(-i) - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) + 2k\pi$.

3. (a) Soit z tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$. (donc $M \neq U$ et $M \neq V$).

M appartient à la droite (UV) privée de U et V si et seulement si $(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MV}) = k\pi$ c'est-à-dire $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = k\pi$
donc si et seulement si $\frac{z-1}{z-i}$ est réel non nul.

- (b) $M(z)$ est un point de la droite (UV) privée de U et V si et seulement si $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = k\pi$ (d'après la question précédente) donc $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k'\pi$ c'est-à-dire $(\overrightarrow{M'V}, \overrightarrow{M'U}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k'\pi$.
 M' décrit alors le cercle de diamètre $[UV]$, privé des points U, V et O .

Exercice 3 (pour ceux ayant choisi la spécialité)

Partie A :

1. **Théorème de Bézout :** Deux entiers relatifs x et y sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers u et v tels que $ux + vy = 1$.

Théorème de Gauss : Soient trois entiers relatifs a, b et c . Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

2. **Démontrons le théorème de Bézout :**

On suppose que a et b sont premiers entre eux et que a divise bc .

Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe u et v relatifs tels que $ua + vb = 1$.

Alors : $uac + vbc = c$. Comme a divise bc , il existe k relatif tel que $bc = ka$.

On en déduit : $uac + kav = c$ donc $a(uc + kv) = c$. $uc + kv$ est un entier relatif (somme et produit de relatifs) donc a divise c .

Partie B :

On considère le système (S) $\begin{cases} n \equiv 13 & (19) \\ n \equiv 6 & (12) \end{cases}$

1. 19 est un nombre premier donc 19 et 12 sont premiers entre eux ; d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $19u + 12v = 1$.

On pose alors $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$.

$$N = 13(1 - 19u) + 6 \times 19u = 13 - 1319u + 6 \times 19u \equiv 13(19).$$

$$N = 13 \times 12v + 6 \times (1 - 12v) = 13 \times 12v + 6 - 6 \times 12v \equiv 6(12).$$

N est bien solution du système S.

2. (a) Soit n_0 une solution de (S).

n est solution de (S) si et seulement si $\begin{cases} n \equiv 13 & (19) \\ n \equiv 6 & (12) \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} n \equiv 13 \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv 6 \equiv n_0 & (12) \end{cases}$

donc (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$.

- (b) • Si $n \equiv n_0(12 \times 19)$ alors il est clair que $n \equiv n_0(19)$ et $n \equiv n_0(12)$ donc que $\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$.

• Réciproquement :

Si $\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$, alors il existe k et k' entiers relatifs tels que $n - n_0 = 19k$ et $n - n_0 = 12k'$ donc $19k = 12k'$.

19 divise donc $12k'$. Comme 12 et 19 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 19 divise k' donc $k' = 12k''$, $k'' \in \mathbb{Z}$. Alors $n - n_0 = 12 \times 19k''$ donc $n \equiv n_0(12 \times 19)$.

On a montré que $\begin{cases} n \equiv n_0 & (19) \\ n \equiv n_0 & (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0(12 \times 19)$.

3. (a) Appliquons l'algorithme d'Euclide :

On a successivement :

$$19 = 1 \times 12 + 7$$

$$12 = 7 \times 1 + 5$$

$$7 = 5 \times 1 + 2$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$\text{d'où } 1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2(7 - 5 \times 1) = 5 \times 3 - 2 \times 7 = (12 - 7) \times 3 - 2 \times 7 = 12 \times 3 - 7 \times 5 = 12 \times 3 - (19 - 12) \times 5 = \boxed{12 \times 8 - 19 \times 5}.$$

Un couple $(u; v)$ est : $\boxed{(u; v) = (-5; 8)}$.

Alors $N = 13 \times 12 \times 8 + 6 \times 19 \times (-5) = \boxed{678}$.

(b) $N = 678$ est une solution de S . D'après la question 2b), les solutions de (S) sont tous les nombres n tels que $n \equiv N \pmod{12 \times 19}$ c'est-à-dire $n \equiv 678 \pmod{228}$. (car $12 \times 19 = 228$)

$$\mathcal{S} = \{678 + 228k, k \in \mathbb{Z}\}$$

4. Soit n un entier tel que, si on le divise par 12, le reste est 6 et si on le divise par 19, le reste est 13. n est donc une solution de (S) . Alors $n \equiv 678 \pmod{228} \equiv 222 \pmod{228}$. Le reste r de la division de n par $228 = 12 \times 19$ est $\boxed{222}$.

Exercice 4

1. Notons C l'événement « le ballon est crevé ». Alors $p(C) = 0,2$.

(a) La probabilité que la ballon soit intact au bout de deux tirs est $p(\overline{C} \cap \overline{C})$. Comme les tirs sont indépendants, on a : $p(\overline{C} \cap \overline{C}) = p(\overline{C})^2 = (1 - p(C))^2 = 0,8^2 = 0,64$.

(b) Calculons la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon. L'événement contraire est : « deux tirs ne suffisent pas », autrement dit, le ballon n'est pas crevé au bout de deux tirs. C'est l'événement contraire de celui étudié au a). Sa probabilité vaut $1 - 0,64 = 0,36$.

(c) Calculons la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon. L'événement contraire est « le ballon n'est pas crevé au bout de n tirs », de probabilité $(p(\overline{C}))^n = 0,8^n$ (car les tirs sont indépendants).

Par conséquent : $p_n = 1 - 0,8^n$.

(d) $p_n > 0,99$ équivaut à $1 - 0,8^n > 0,99$ c'est-à-dire à $0,8^n < 0,01$.

La fonction \ln étant croissante, on trouve $n \ln 0,8 < \ln 0,01$ donc $n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ soit $n \geq \boxed{21}$.

Il faut que $n \geq 21$ pour que $p_n > 0,99$.

2. Pour chaque valeur de k compris entre 1 et 4, la probabilité de crever le ballon est la probabilité p_k , calculée en 1) c) : $p_k = 1 - 0,8^k$.

Le dé n'est pas pipé donc chaque face a la même probabilité de sortie égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité de crever le ballon est : $\frac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \boxed{0,4096}$.

3. (a) Les fréquences sont : $f_1 = \frac{58}{200} = \frac{29}{100}$; $f_2 = \frac{49}{200}$; $f_3 = \frac{52}{200} = \frac{13}{50}$ et $f_4 = \frac{41}{200}$.

(b) Alors $d^2 = \sum_{k=1}^4 \left(f_k - \frac{1}{4} \right)^2 = \boxed{0,00375}$.

(c) On constate que $d^2 < D_9$.

Au risque de 10%, on peut considérer que le dé n'est pas pipé.