Correction du baccalauréat S Liban juin 2007

EXERCICE 1 **6 points**

1. **a.** Signe de $\ln x(1-\ln x)$: on fait un tableau de signes :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x(1-\ln x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

b. On a $f(x)-g(x)=\ln x-(\ln x)^2=\ln x(1-\ln x)$. On déduit du tableau précédent que $\mathscr{C}$ est au dessous de $\mathscr{C}'$ sauf entre 1 et e.

2. $M(x\,;\,\ln x)$ et $N\left(x\,;\,(\ln x)^2\right)$.

a. On a déjà vu que $h(x)=\ln x(1-\ln x)$.
Cette fonction est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}\ln x=\dfrac{1}{x}(1-2\ln x)$ qui est du signe de $1-2\ln x$. Cette différence s'annule pour $x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$.
Sur $]0\;;\;\sqrt{\mathrm{e}}[$, $h'(x)>0$, donc h est croissante ;
Sur $]\sqrt{\mathrm{e}}\;;\;+\infty[$, $h'(x)<0$, donc h est décroissante ;
Donc la fonction h a un extremum (la dérivée s'annule en changeant de signe), qui est un maximum pour $x=\sqrt{\mathrm{e}}$.
Comme ce nombre est entre 1 et e, le nombre $h(x)$ est positif et est égal à la distance MN.
Donc $Mn=h\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\ln\sqrt{\mathrm{e}}(1-\ln\sqrt{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

b. L'équation $(\ln x)^2-\ln x=1$ est équivalente à $-h(x)=1 \iff h(x)=-1$.
On pose $X=\ln x$ et on résout l'équation $X^2-X-1=0 \iff \left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}-1 \iff \left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4} \iff \left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.
On a donc deux solutions $X_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\ln x_1$ et $X_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\ln x_2$.
On a donc finalement deux solutions :
$x_1=\mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ et $x_2=\mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

c. Sur $]0\;;\;1[\cup]\mathrm{e}\;;\;+\infty[$ la fonction $(\ln x)^2-\ln x$ est positive et représente donc la distance MN.
D'après la question précédente il existe deux valeurs de x pour lesquelles la distance $MN=1$. Ce sont les réels $a=\mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ et $b=\mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

3. **a.** Grâce à une intégration par parties (avec $u'=\mathrm{d}x$ et $v=\ln x$, d'où $u=1$ et $v'=\dfrac{1}{x}$, les fonctions u' et v' étant continues sur $]0\;;\;+\infty[$:

$$\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x=[x\ln x]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-0-[x]_1^{\mathrm{e}}=\mathrm{e}-\mathrm{e}-(-1)=1.$$

b. Avec $G(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$ qui est dérivavable, on a $G'(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + x\left(\dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{2}{x}\right) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + 2\ln x - 2 = (\ln x)^2$.

c. Sur l'intervalle $[1~;~\text{e}]$ on a vu que $\ln(x) - (\ln x)^2 \geqslant 0$, donc l'aire $\mathcal{A}$ est égale à $\displaystyle\int_1^{\text{e}} \left[\ln x - (\ln x)^2\right]\,\text{d}x = \int_1^{\text{e}} \ln x\,\text{d}x - \int_1^{\text{e}} g(x)\,\text{d}x = 1 - [G(x)]_1^{\text{e}} = 1 - G(\text{e}) + G(1) = 1 - \text{e}(1-2+2) + 2 = 3 - \text{e}$. (u. a.)

EXERCICE 2 **6 points**

Candidats ne faisant pas l'option mathématiques

C(1 ; 1 ; 2)

1. Un vecteur directeur de (d) est $\left(-\dfrac{1}{2}~;~0~;~-\dfrac{3}{2}\right)$ qui n'est manifestement pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\jmath}\,(0~;~1~;~0)$. Fausse.
2. Un vecteur normal au plan (P) a pour coordonnées $(1~;~3~;~-5)$ qui n'est pas non plus colinéaire au vecteur précédent de (d).
   De plus A $\notin (d)$. Fausse
3. On a : $\text{AB}^2 = 4+1+1 = 6$, $\text{AC}^2 = 1+4+1 = 6$ et $\text{BC}^2 = 9+9+0 = 18$. ABC est donc isocèle en A
   Si $\widehat{\text{BAC}}$ avait pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$, alors le triangle serait équilatéral, ce qui est faux.
   Fausse.
4. On a par définition : G existe car $-1+1+1 \neq 0$, et $-\overrightarrow{\text{GA}} + \overrightarrow{\text{GB}} + \overrightarrow{\text{GC}} = \overrightarrow{0}$. Soit I le milieu de [BC] ; l'égalité précédente peut s'écrire : $\overrightarrow{\text{GI}} - \overrightarrow{\text{IA}} + \overrightarrow{\text{GI}} + \overrightarrow{\text{IB}} + \overrightarrow{\text{GI}} + \overrightarrow{\text{IC}} = \overrightarrow{0} \iff -\overrightarrow{\text{IA}} + \overrightarrow{\text{GI}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\text{GI}} = \overrightarrow{\text{IA}} \iff$ G est le milieu de [AG]. Vraie
5. On a vu que $\text{BC}^2 = 18 \iff \text{BC} = 3\sqrt{2}$.
   La distance de C au plan P est égale à : $\dfrac{|1+6-5|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5} < 3\sqrt{2}$. Donc la sphère et le plan sont sécants. Vraie

EXERCICE 2 **6 points**

Candidats ayant choisi l'option mathématiques

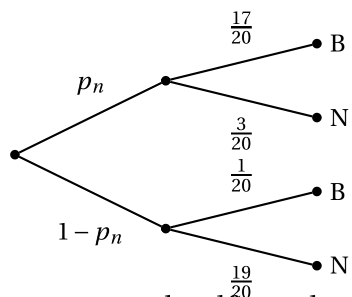
1. Cette écriture est bien celle d'une similitude ditecte. S'il existe un point fixe, alors $z = 2\text{i}z + 1 \iff z(1-2\text{i}) = 1 \iff z = \dfrac{1}{1-2\text{i}} \iff z = \dfrac{1+2\text{i}}{1+4} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}\text{i}$. Le centre est bien A.
   $\left\{\begin{array}{rcl} z' & = & 2\text{i}z+1 \\ \dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\text{i} & = & 2\text{i}\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\text{i}\right)+1 \end{array}\right.$ entraîne par différence : $z' - \left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\text{i}\right) = 2\text{i}\left(z - \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}\text{i}\right)$
   ce qui entraîne en prenant les arguments que $\left(\overrightarrow{\text{A}M}, \overrightarrow{\text{A}M'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$: en prenant les modules $\text{A}M' = 2\text{A}M$. Donc le rapport est égal à 2. Vraie
2. Pour $z = 5$, on obtient $5 = x^2+2x+y^2+1 \iff x^2+2x+y^2-4 = 0 \iff (x+1)^2 - 1 + y^2 - 4 = 0 \iff (x+1)^2 + y^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$ qui est l'équation du cercle de centre $(-1~;~0~;~5)$ et de rayon $\sqrt{5}$. Fausse.
3. $750 = 3\times 25\times 10 = 2\times 3\times 5^3$, donc $5^{750} = 5^{2\times 3\times 5^3} = \left[\left(5^5\right)^3\right]^6 = \left(5^{5^3}\right)^{7-1}$. Le nombre 5^{5^3} composé uniquement de facteurs 5 n'est pas divisible par le nombre premier 7, donc d'après le petit théorème de Fermat $\left(5^{5^3}\right)^{7-1} - 1$ est divisible par 7. Vrai.
4. $\text{PGCD}(3n+4,~4n+3) = \text{PGCD}(3n+4,~4n-+3-3n-4) = \text{PGCD}(3n+4,~n-1) = \text{PGCD}(n-1,~3n+4-3(n-1)) = \text{PGCD}(n-1,~7)$.
   Or par hypothèse $n-1$ est multiple de 7, donc $\text{PGCD}(n-1,~7) = 7$. Vraie

5. Si PGCD$(a,\ b) = 2$; alors il existe k et k' tels que $a = 2k$ et $b = 2k'$.
L'égalité $au + bv = 2$ s'écrit alors $2ku + 2k'v = 2 \iff ku + k'v = 1$ qui signifie que u et v sont premiers entre eux. Fausse.
Un contre exemple : $a = 3,\ b = 4$. On a $23 \times 3 + (-1) \times 4 = 2$ et PGCD$(3,\ 4) = 1$.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. On a dans l'urne U_1, 17 boules blanches, donc $p_2 = \dfrac{17}{20} = 0,85$.

2. On peut s'aider d'un arbre. Pour obtenir p_{n+1} il faut considérer les cas où l'on a tiré au rang précédent une boule blanche :



On a donc $p_{n+1} = \dfrac{17}{20}p_n + \left(1 - p_n\right) \times \dfrac{1}{20} = \dfrac{16}{20}p_n + \dfrac{1}{20}$.
Conclusion $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.

3. D'après la formule trouvée $p_3 = 0,8p_2 + 0,05 = 0,8 \times 0,85 + 0,005 = 0,68 + 0,05 = 0,73$.

4. **a.** Initialisation : $p_1 = 1 > 0,25$.
Hérédité : supposons qu'au rang n_0, $p_{n_0} > 0,25$, alors $0,8p_{n_0} > 0,2$ et ensuite $0,8p_{n_0} + 0,05 > 0,2 + 0,05$ ou encore $p_{n_0+1} > 0,25$.
On a donc montré par récurrence sur n que pour tout naturel n non nul : $p_n > 0,25$.

b. $p_{n+1} - p_n = 0,8p_n + 0,05 - p_n = -0,2p_n + 0,05$.
Or on vient de démontrer que $p_n > 0,25$ qui entraîne $-0,2p_n < -0,2 \times 0,25$ soit $-0,2p_n < -0,05 \iff -0,2p_n + 0,05 < 0$.
On a donc pour tout $n \geqslant 1,\ p_{n+1} - p_n < 0$, c'est-à-dire que la suite $\left(p_n\right)$ est décroissante

c. La suite $\left(p_n\right)$ est décroissante et minorée par $0,25$: elle donc convergente vers un réel ℓ supérieur ou égal à $0,25$.

d. Les suites $\left(p_n\right)$ et $\left(p_{n+1}\right)$ ayant la même limite ℓ, la relation de récurrence $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$ donne $\ell = 0,8\ell + 0,05 \iff 0,2\ell = 0,05 \iff \ell = \dfrac{0,05}{0,2} = 0,25$.

$$\text{Conclusion : } \lim_{n\to+\infty} p_n = 0,25 = \frac{1}{4}.$$

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. $z' = \dfrac{2z}{|z|} - z = \dfrac{2re^{i\alpha}}{r} - re^{i\alpha} = 2e^{i\alpha} - re^{i\alpha} = (2 - r)e^{i\alpha}$.

2. Avec $z = 3$, la formule précédente donne $z_{A'} = (2-3)e^{0i} = -1$.

3. **a.** B a pour affixe $b = -\sqrt{3}+i$. On a donc $|b^2| = 3+1 \Rightarrow |b| = 2$. On peut écrire $b = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

b. $z_{B'} = (2-2)e^{i\frac{5\pi}{6}} = 0 = z_O$.

4. cf. figure.

5. **a.** Il s'agit de résoudre $z' = 0 \iff (2-r)e^{i\alpha} \iff r = 2$ ou $e^{i\alpha} = 0$. L'ensemble des points dont l'image par f est O est le cercle de centre O et de rayon 2.

b. cf. figure.

6. Points invariants par f : on cherche les complexes z tels que $z = \dfrac{z}{|z|}(2-|z|) \iff$

$z|z| = 2z - z|z| \iff 2z|z| = 2z \overset{\text{car } z\neq 0}{\iff} |z| = 1$. L'ensemble cherché est bien le cercle $\mathscr{C}_1$.

7. M a pour affixe z avec $|z| \neq 1$.

a. D'après la question 1, l'affixe du point I est $\dfrac{1}{2}\left[re^{i\alpha}+2e^{i\alpha}-re^{i\alpha}\right] =$

$\dfrac{1}{2}\times 2e^{i\alpha} = e^{i\alpha}$ qui est un complexe de module 1 quel que soit α.
Le milieu I de [MM'] appartient à $\mathscr{C}_1$.

b. I et M ont à 2π près le même argument : ils sont donc alignés avec O et I appartient à la demi-droite [OM).

c. Construction de l'image de M_1 :
- la demi-droite [OM) coupe le cercle $\mathscr{C}_1$ au point I ;
- il suffit de construire le point image M_1' symétrique de M_1 autour de I.