Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud
novembre 2006

EXERCICE 1 **3 points**

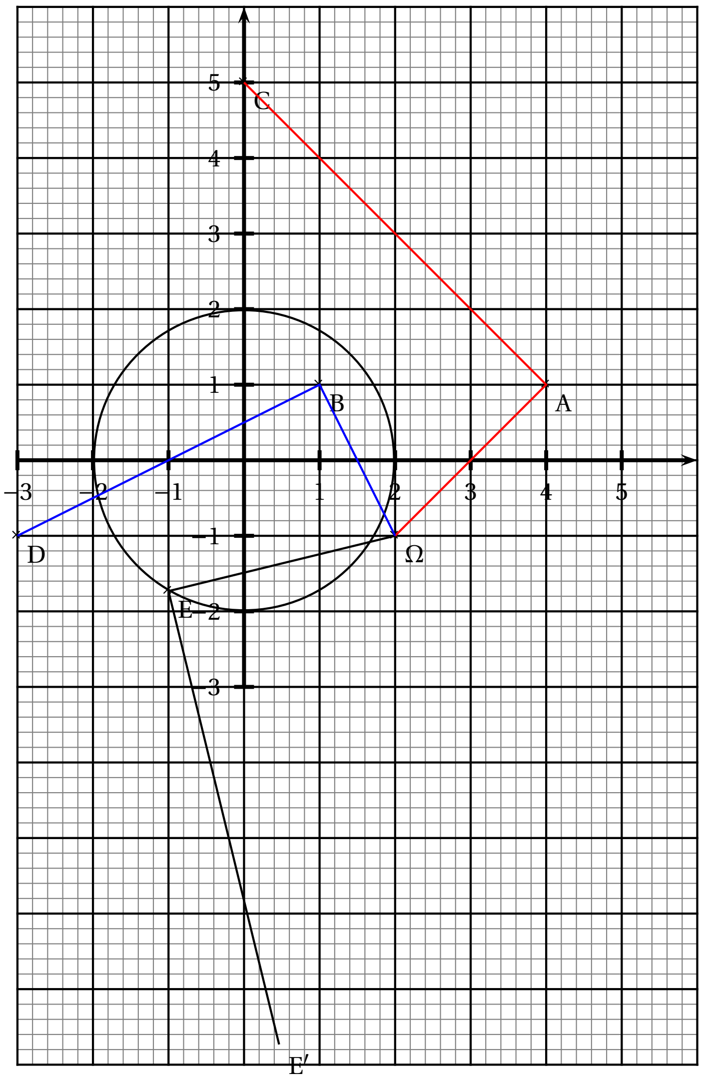
Commun à tous les candidats

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\2\\9\end{pmatrix}$. Il n'existe pas de réel α tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AD}$. Les points A, B et D ne sont pas alignés.
2. Les égalités $3+1=4$ et $0+4=4$ sont vraies ; les points A et B appartiennent au plan. Donc la droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x+y=4$.
3. Les coordonnées des trois points vérifient l'équation. L'équation proposée est bien celle du plan (BCD), ces trois points étant manifestement disjoints deux à deux.
4. Les coordonnées de A ne vérifient pas l'équation précédente. Donc A n'appartient pas au plan (BCD). Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD) si et seulement si la distance de A à ce plan est égale au rayon du cercle, c.à.d si $d(\text{A}, \text{(BCD)}) = \dfrac{81}{\sqrt{18^2+9^2+5^2}} = 9 \iff \dfrac{81}{\sqrt{430}} = 9$ qui est une égalité fausse. La proposition est fausse.
6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est obtenue en traduisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{B}M} = \lambda\overrightarrow{\text{BD}}$ qui se traduit par le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2\lambda\\ y &=& 4-\lambda\\ z &=& -5-5\lambda\end{array}\right.$ qui se traduit en posant $2\lambda = 1-2k \iff \lambda = \dfrac{1}{2}-k$ par le système proposé par l'énoncé. La proposition est vraie.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Cf. cours.
2.



3. **a.** On obtient $z_{A'} = 5i = z_C$ et $z_{B'} = -3-3i = z_D$.

b. $M(z)$ est invariant par f si et seulement si $z' = z = (1+2i)z - 2 - 4i \iff 2iz = 2+2i \iff z = 2-i$. L'équation ayant une seule solution, f a un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = 2 - i$.

4. **a.** On a $z' - z = 2iz - 2 - 4i = -2i(2 - i - z)$.

b. En prenant le module des deux complexes ci-dessus, on obtient $MM' = |-2i| \times \Omega M$ et si $\Omega \neq M$, $\dfrac{MM'}{\Omega M} = 2$.

L'égalité trouvée au a peut, si $\Omega \neq M$, s'écrire $\dfrac{z'-z}{2-i-z} = -2i$. En prenant les arguments de ces deux complexes, on obtient $\left(\overrightarrow{M\Omega}\,,\ \overrightarrow{MM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

c. On en déduit que le triangle $\Omega MM'$ est un triangle rectangle en M.

d. On a $|z_E|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$.

Donc $z_E = 2\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right] = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Pour placer le point E, il suffit de construire le cercle de centre O et de rayon 2. Le point E est le point de ce cercle d'abscisse 1.

D'après les questions b et c on a $EE' = 2\Omega E$ et $\left(\overrightarrow{E\Omega}\,,\ \overrightarrow{EE'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. On construit donc la perpendiculaire en E à la droite (EΩ) et on place sur cette droite le point E′ tel que $EE' = 2\Omega E$ et $\left(\overrightarrow{E\Omega}\,,\ \overrightarrow{EE'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Cf. cours

2. – On cherche n tel que $2^n \equiv 1 \mod 7$; $n = 3$ est le premier naturel qui convient.

– On cherche n tel que $3^n \equiv 1 \mod 7$; $n = 6$ est le premier naturel qui convient car $3^6 = 729 = 7 \times 104 + 1$.

3. **a.** Soit $a \in \mathbb{N}, a \neq 7k, k \in \mathbb{N}$. Il existe $r \in \mathbb{N},\ r < 7$ tel que $a = 7k + r$. On a donc $a \equiv r \mod 7$, donc $a^6 \equiv r^6 \mod 7$.

Or :

– $1^6 \equiv 1 \mod 7$: évident :

– $2^3 \equiv 1 \mod 7$ donc d'après la propriété 1 b ci-dessus, $\left(2^3\right)^2 \equiv 1^2 \mod 7$;

– $3^6 \equiv 1 \mod 7$;

– $4^6 = \left(2^2\right)^3 = \left(2^3\right)^2$; d'après la propriété 1 b ci-dessus $2^3 \equiv 1 \mod 7 \Rightarrow \left(2^3\right)^2 \equiv 1 \mod 7$.

– $5^6 = 15\ 625 = 7 \times 2\ 232 + 1$, donc $5^6 \equiv 1 \mod 7$.

– Enfin $6^6 = (2 \times 3)^6 = 2^6 \times 3^6$, donc d'après la propriété du 1 a, $6^6 \equiv 1 \mod 7$.

Conclusion : on a démontré que dans tous les cas : $a^6 \equiv 1 \mod 7$.

b. On a $a^k \equiv 1 \mod 7$, k étant le plus petit naturel vérifiant cette congruence.

D'autre part $6 = kq + r$ avec $r < k$.

On a donc $a^6 = a^{kq+r} = a^{kq} \times a^r = \left(a^k\right)^q \times a^r$. Or $a^k \equiv 1 \mod 7$, donc $a^6 \equiv a^r \equiv 1 \mod 7$. Donc $a^r \equiv 1 \mod 7$.

Or k étant le plus petit naturel vérifiant k $a \equiv 1 \mod 7$, il en résulte que $r = 0$, c'est-à-dire que k divise 6.

Les valeurs possibles pour k sont donc 1, 2, 3 et 6.

c. On a trouvé l'ordre de 2 : c'est 3, donc l'ordre de 4 est aussi 3 et l'ordre de 3, c'est 6 ; on a vu que l'ordre de 5 est 6.

4. $A_{2006} = 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006}$.

On a $2\ 006 = 6 \times 334 + 2$. Donc $2^{2\ 006} = 2^{6\times 334+2} = 2^{6\times 334} \times 2^2 = \left(2^6\right)^{334} \times 2^2$. Or $2^6 \equiv 1 \mod 7$, donc finalement $2^{2\ 006} \equiv 2^2 \mod 7$. De même pour les autres puissances, donc $A_n \equiv 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 \mod 7$, soit $A_n \equiv 90 \equiv 6 \mod 7$ (car $90 = 7 \times 12 + 6$).

Finalement $A_{2006} \equiv 6 \mod 7$.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** On a une loi de Bernoulli de paramètres $p = \dfrac{1}{4}$ et $n = 50$.

b. On a $\text{E} = np = 50 \times \dfrac{1}{4} = 12,5$. (tulipes jaunes)

c. On a $p(X = n) = \binom{50}{n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{50-n} = \binom{50}{n}\dfrac{3^{50-n}}{4^{50}}$.

d. $p(X = 15) = \binom{50}{15}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{15} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{50-15} \approx 0,089$.

2. **a.** Si lot choisi est le 2, on a autant de chances d'avoir une tulipe jaune que le contraire. La loi de Bernoulli a ici pour paramètres $n = 50$ et $p = \dfrac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir n tulipes jaunes est donc :

$p_{\text{B}}\left(J_n\right) = \binom{50}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{50-n} = \binom{50}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{50} = \binom{50}{n}2^{-50}$.

b. De la même façon que précédemment $p_{\text{A}}(J_n) = \binom{50}{n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{50-n} = \binom{50}{n} \times \dfrac{3^{50-n}}{4^{50}}$.

A et B forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales,

$p(J_n) = p(\text{A} \cap J_n) + p(\text{B} \cap J_n) = p(\text{A}) \times p_A(J_n) + p(\text{B}) \times p_B(J_n) = \dfrac{1}{2}\binom{50}{n} \times \dfrac{3^{50-n}}{4^{50}} + \dfrac{1}{2}\binom{50}{n} \times \dfrac{1}{2^{50}} = \dfrac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\dfrac{3^{50-n}}{4^{50}} + \dfrac{1}{2^{50}}\right) = \dfrac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\dfrac{3^{50-n}+2^{50}}{4^{50}}\right)$.

c. $p_n = p_{J_n}(\text{A}) = \dfrac{p(\text{A} \cap J_n)}{p(J_n)} = \dfrac{p_A(J_n) \times p(A)}{p(J_n)} = \dfrac{\frac{1}{2}\binom{50}{n}\frac{3^{50-n}}{4^{50}}}{\frac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2^{50}}\right)} = \dfrac{\frac{3^{50-n}}{4^{50}}}{\left(\frac{3^{50-n}+2^{50}}{4^{50}}\right)} = \dfrac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}$.

d. $p_n \geqslant 0,99 \iff \dfrac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}} \geqslant 0,99 \iff 3^{50-n} \geqslant 0,9\left(3^{50-n}+2^{50}\right) \iff 0,1 \times 3^{50-n} \geqslant 0,9 \times 2^{50} \iff (50-n)\ln 3 \geqslant \ln\left(9 \times 2^{50}\right) \iff n \leqslant 50 - \dfrac{\ln\left(2^{50} \times 9\right)}{\ln 3} \iff n \leqslant 16,4$.

Conclusion : il faut que $n < 17$.

Interprétation : Si le nombre de tulipes jaunes est peu élevé (ici moins de 17) la probabilité d'avoir choisi le lot 1 est très grande ; si ce nombre de tulipes jaunes se rapproche de 25 sur 50, la probabilité est grande que le lot choisi soit le lot 2.

3. Exercice 4 — 8 points

Commun à tous les candidats

a.

i. On a $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

Dérivée : $f_n'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{n} > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$. Les fonctions f_n sont donc croissantes de $-\infty$ à $+\infty$.

ii. La fonction f_n est continue comme somme de fonctions continues et croissante de $-\infty$ à $+\infty$: il existe donc un réel unique $\alpha_n \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

Comme $f_n(1) = \dfrac{1}{n} - 1 < 0$ et $f_n(\text{e}) = 1\dfrac{1}{n} - 1 = \dfrac{1}{n} > 0$, on en déduit que $1 < \alpha_n < \text{e}$.

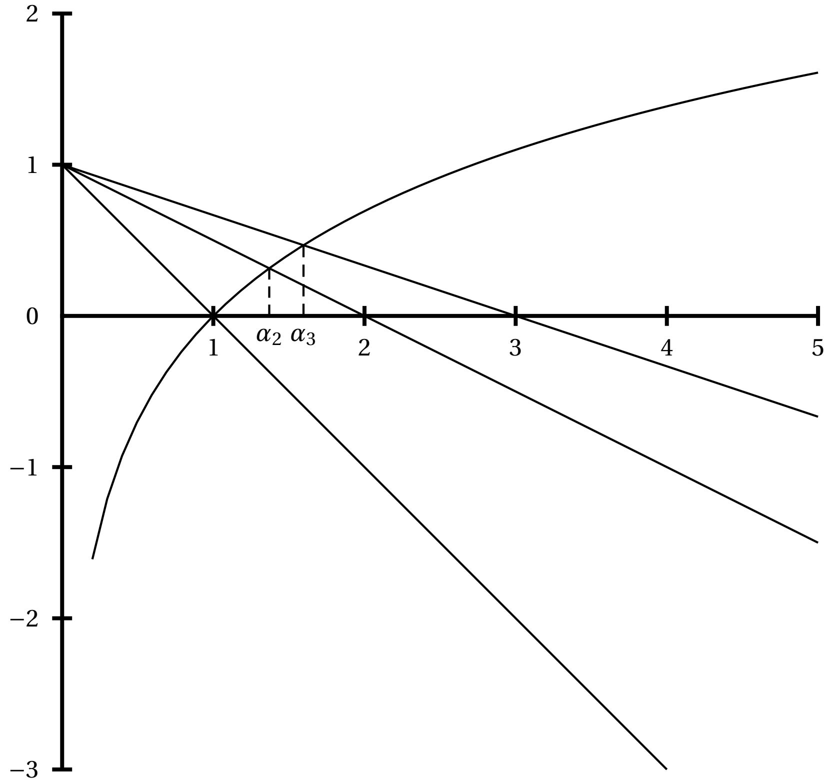
b.

i. L'équation est de la forme : $y = ax + 1$; en utilisant le fait qu'elle contient le point B_n, on obtient $0 = an + 1 \iff a = -\dfrac{1}{n}$. On a donc $M(x\,;\,y) \in \Delta_n \iff y = -\dfrac{1}{n}x + 1$

ii. $\Delta_1 \quad y = -x + 1$

$\Delta_2 \quad y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

$\Delta_1 \quad y = -\dfrac{1}{3}x + 1$



iii. Le point commun à Γ et Δ_n a ses coordonnées qui vérigfient $\ln x = -\dfrac{1}{n}x+1 \iff \ln x + \dfrac{1}{n}x - 1 = 0 \iff f_n(x) = 0$ qui a pour solution unique α_n sur $]0\ ;\ +\infty[$.

iv. α_1 est la solution de $\ln x + x - 1 = 0$ qui a pour solution évidente $\alpha_1 = 1$ (suggéré aussi par le croquis).
Toujours d'après le croquis la suite (α_n) semble croissante.

c. i. On sait que $\ln \alpha_n + \dfrac{\alpha_n}{n} - 1 = 0 \iff \ln \alpha_n = 1 - \dfrac{\alpha_n}{n}$.

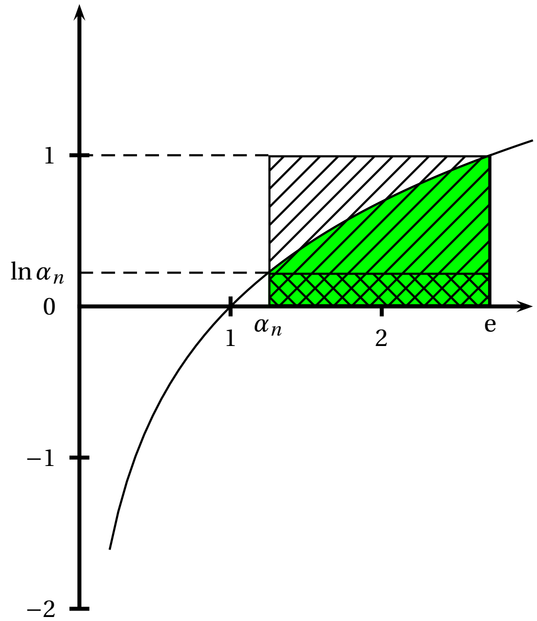
ii. $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln \alpha_n + \dfrac{\alpha_n}{n+1} - 1 = 1 - \dfrac{\alpha_n}{n} + \dfrac{\alpha_n}{n+1} - 1 = \dfrac{\alpha_n}{n+1} - \dfrac{\alpha_n}{n} = \dfrac{n-n-1}{n(n+1)}\alpha_n = -\dfrac{\alpha_n}{n(n+1)} < 0$.

iii. Or $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$. Conclusion comme les fonctions f_n sont croissantes et comme $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$, il en résulte que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, ce qui signifie que la suite (α_n) est croissante

iv. La suite (α_n) est croissante et majorée par e : elle est donc convergente vers un réel $\ell \leqslant \mathrm{e}$.
Par continuité, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$, donc $\ln \ell - 1 = 0 \iff \ln \ell = 1 \iff \ell = \mathrm{e}$.

d. i. On a $\mathscr{A}(\mathscr{D}_n) = \displaystyle\int_{\alpha_n}^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x$.
En intégrant par parties, on trouve qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \ln x$ est la fonction $x \longmapsto x\ln x - x$.
$\mathscr{A}(\mathscr{D}_n) = [x\ln x - x]_{\alpha_n}^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - \mathrm{e} - \alpha_n \ln \alpha_n + \alpha_n = \alpha_n(1 - \ln \alpha) = \alpha_n\left(1 - 1 + \dfrac{\alpha_n}{n}\right) = \dfrac{\alpha_n^2}{n}$.

ii.



D'après le dessin l'intégrale est comprise entre l'aire du rectangle hachuré de gauche à droite et l'aire du rectangle hachuré de droite à gauche : d'où l'encadrement :

$$\ln \alpha_n (\mathrm{e} - \alpha_n) \leqslant \frac{\alpha_n^2}{n} \leqslant 1 \times (\mathrm{e} - \alpha_n)$$

iii. L'encadrement précédent permet (en multipliant par n et en divisant par $\ln \alpha_n$, pour $n \neq 1$) d'obtenir les deux inégalités :
$n(\mathrm{e} - \alpha_n) \leqslant \dfrac{\alpha_n^2}{\ln \alpha_n}$ et $\alpha_n^2 \leqslant n(\mathrm{e} - \alpha_n)$. On obtient donc l'encadrement final :

$$\alpha_n^2 \leqslant n(\mathrm{e} - \alpha_n) \leqslant \frac{\alpha_n^2}{\ln \alpha_n}$$

iv. Par passage à la limite on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n(\mathrm{e} - \alpha_n) = \mathrm{e}^2$..
On peut en déduite que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)$.
La suite (α_n) converge donc comme la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire lentement.