

◌ Corrigé du baccalauréat S Asie juin 2007 ◌

EXERCICE 1

4 points

- On a $f'(x) = 2 \cos x \sin x = \sin 2x$. Vrai
- En intégrant par parties : $\begin{cases} u(t) = t & ; & u'(t) = 1 \\ v'(t) = f'(t) & ; & v(t) = f(t) \end{cases}$

$$\int_{-1}^1 t f'(t) dt = [t f(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f(t) dt = f(1) - (-1)f(-1) - \int_{-1}^1 f(t) dt =$$

$$f(1) + f(-1) - \int_{-1}^1 f(t) dt.$$

Or $f(-1) = -f(1)$, donc $\int_{-1}^1 t f'(t) dt = - \int_{-1}^1 f(t) dt$. Vrai
- Avec $f(x) = x$ et $g(x) = -\frac{x}{3} + 3$, $\int_0^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2}$ et $\int_0^3 \left(-\frac{x}{3} + 3 \right) dx =$

$$\left[-\frac{x^2}{6} + 3x \right]_0^3 = -\frac{9}{6} + 9 = \frac{15}{2}.$$

On a bien $\int_0^3 f(x) dx \leq \int_0^3 g(x) dx$ et $f(3) = 3$ et $g(3) = 2$. Faux
- f est solution de l'équation différentielle, donc $f'(x) = -2f(x) + 2 = 2(1 - f(x))$.
 Si f est constante, alors $f'(x) = 0$ et par conséquent $2(1 - f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$.
 Comme la fonction n'est pas constante $f(x) \neq 1$, donc $2(1 - f(x)) = f'(x) \neq 0$.
 Aucune tangente n'est horizontale. Vrai

EXERCICE 2

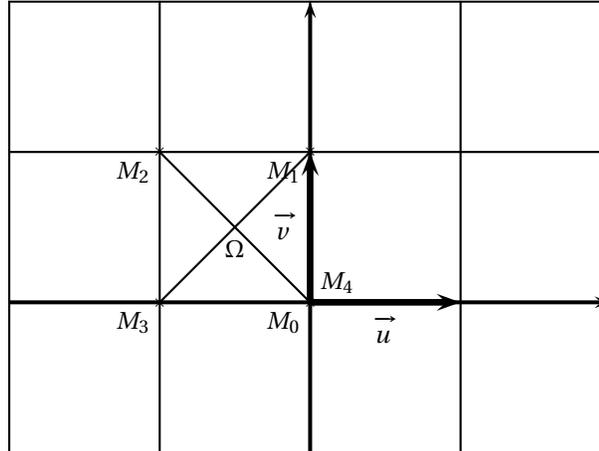
5 points

- $z_0 = 0$, $z_1 = \lambda \times 0 + i = i$, $z_2 = \lambda i + i = (\lambda + 1)i$, $z_3 = \lambda[(\lambda + 1)i] + i = \lambda^2 i + \lambda i + i = (\lambda^2 + \lambda + 1)i$.
 - Par récurrence :
 Initialisation $z_0 = 0 = \frac{\lambda^0 - 1}{\lambda - 1} i$.
 Hérité : supposons que $z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot i$.
 On sait que $z_{n+1} = \lambda z_n + i = \lambda \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot i + i = \frac{\lambda^{n+1} - \lambda + \lambda - 1}{\lambda - 1} \cdot i = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1} \cdot i$.
 La formule est vraie au rang $(n + 1)$.
 On a démontré par récurrence que $z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot i$.
- $\lambda = i$
 - D'après 1. a., on a $z_3 = (-1 + i + 1)i = -1$.
 Donc $z_4 = i \times (-1) + i = 0$.
 Ou plus rapide en utilisant la formule du 1. b. : $z_4 = \frac{i^4 - 1}{i - 1} \cdot i = 0 \cdot i = 0$.
 - $z_{n+4} = \frac{i^{n+4} - 1}{i - 1} \cdot i = \frac{i^n \times i^4 - 1}{i - 1} i = \frac{i^n - 1}{i - 1} \cdot i = z_n$.
 Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+4} = z_n$.
 - On a donc $z_{n+1} = (z_n + 1)i$ (1).
 Cherchons un point invariant par la transformation $z_n \mapsto z_{n+1}$. S'il existe un point invariant Ω d'affixe ω , on doit avoir $\omega = (\omega + 1)i \iff \omega(1 - i) = i \iff \omega = \frac{i}{1 - i} = \frac{i(1 + i)}{1 - i} \iff \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.
 On a donc en retranchant ω à chaque membre de (1) :
 $z_{n+1} - \omega = (z_n + 1)i - \omega \iff z_{n+1} + \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = (z_n + 1)i + \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \iff z_{n+1} - \omega = z_n i + i\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (-i)^2 = \left[z_n - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2i} \right) \right] i \iff z_{n+1} - \omega = (z_n - \omega) i \iff$

$$z_{n+1} - \omega = (z_n - \omega) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Conclusion M_{n+1} est l'image de M_n dans la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d.



3. a. Il existe k tel que $\lambda^k = 1$.

$$\text{On peut donc écrire } z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot i = \frac{\lambda^n \times \lambda^k - 1}{\lambda - 1} \cdot i = \frac{\lambda^{n+k} - 1}{\lambda - 1} \cdot i = z_{n+k}.$$

$$\text{b. } z_{n+k} = z_n \iff \frac{\lambda^{n+k} - 1}{\lambda - 1} \cdot i = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot i \iff \lambda^{n+k} - 1 = \lambda^n - 1 \iff \lambda^{n+k} = \lambda^n \iff \lambda^n \times \lambda^k = \lambda^n \iff \lambda^k = 1.$$

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

Partie I

1. a. On sait que la similitude directe s telle que $s(O) = A$ et $s(B) = 0$ est unique et que son écriture complexe est : $z' = az + b$, a et b étant deux complexes.

On a donc en utilisant les affixes des deux points O et B et de leurs images :

$$\begin{cases} 10 &= a \times 0 + b \\ 0 &= a \times 5i + b \end{cases} \iff \begin{cases} 10 &= b \\ 2i &= a \end{cases}$$

L'écriture complexe de s est donc $z' = 2iz + 10$.

b. Éléments caractéristiques :

- Points invariants ? Ω d'affixe ω est invariant par s si $\omega = 2i\omega + 10 \iff$

$$\omega(1 - 2i) = 10 \iff \omega = \frac{10}{1 - 2i} = \frac{10(1 + 2i)}{1 + 4} = 2 + 4i.$$

- Rapport de la similitude : c' est $|a| = |2i| = 2$.

- Angle de la similitude :

$$\begin{cases} z' &= 2iz + 10 \\ 2 + 4i &= 2i(2 + 4i) + 10 \end{cases} \Rightarrow (\text{par différence}) z' - \omega = 2i(z - \omega) \iff z' - \omega = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega).$$

La similitude s a pour centre $\Omega(2 + 4i)$, pour rapport 2 et pour angle $\frac{\pi}{2}$.

c. $s \circ s(B) = s(O) = 2i \times 0 + 10 = 10 = z_A$. Donc $s \circ s(B) = A$.

On a donc $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O}) = \frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) = \pi$, ce qui signifie que Ω est aligné avec A et B et plus précisément que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle rectangle OAB .

2. a. On a aisément $A' \in \mathcal{D}$ et $B' \in \mathcal{D}$.
 Un vecteur normal à \mathcal{D} est le vecteur $\vec{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et est donc colinéaire au vecteur \vec{a} , donc (AA') est perpendiculaire à \mathcal{D} et A' est bien le projeté orthogonal de A sur \mathcal{D} . On démontre de même que B' est le projeté orthogonal de B sur \mathcal{D} .
- b. Image de B' : on l'affixe de $s(B')$: $z' = 2i(2 + i) + 10 = 4i + 8 = z_{A'}$.
- c. L'angle de la similitude étant égal à $\frac{\pi}{2}$, on a $(\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega A'}) = \frac{\pi}{2}$.
 Conclusion le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.

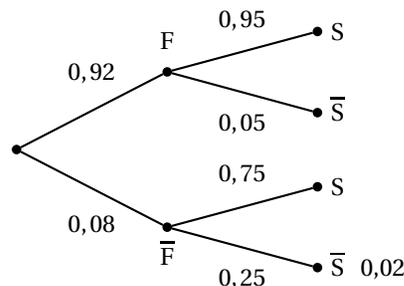
Partie II

1. a. Par définition l'image de la droite (OB) est la droite (AO). Or ces deux droites sont perpendiculaires : la similitude est directe : son angle est égal à $\frac{\pi}{2}$.
- b. Comme dans la partie I, $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2}$, donc le triangle $O\Omega B$ est rectangle en Ω , donc Ω appartient au (demi-)cercle de diamètre $[OA]$.
 De même Ω appartient au (demi-)cercle de diamètre $[OB]$.
 La droite $(O\Omega)$ perpendiculaire aux droites (ΩA) et (ΩB) est donc (d'après l'unicité de la perpendiculaire à une droite) à la droite (AB) . Ω est donc le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.
2. Image par s de la droite (BB') : l'image de B est O et l'image de B' est B'' tel que (BB') soit perpendiculaire à (OB'') ; or (BB') est perpendiculaire à \mathcal{D} : donc B'' appartient à \mathcal{D} .
 Conclusion : l'image par s de la droite (BB') est la droite \mathcal{D} .
 De même O point de \mathcal{D} a pour image A et A' a pour image A'' tel que la droite (AA'') soit perpendiculaire à \mathcal{D} . Or (AA') est perpendiculaire à \mathcal{D} , donc l'image de \mathcal{D} est la droite (AA') .
 D'après la question précédente B' point de (BB') a pour image un point de \mathcal{D} et B' point de \mathcal{D} a pour image un point de (AA') . Conclusion : l'image de B' appartient à $\mathcal{D} \cap (AA') = \{A'\}$. L'image par s de B' est A' .
- b. Par définition de la similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega A'}) = \frac{\pi}{2}$.
 Conclusion : le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$

EXERCICE 3

4 points

1. a. On a $p(F) = 0,92$; $p_F(S) = 0,95$; $p(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0,02$.
- b. $p(F) = 0,92 \Rightarrow p(\overline{F}) = 0,08$.
- c. On sait que $p_{\overline{F}}(\overline{S}) = \frac{p(\overline{F} \cap \overline{S})}{p(\overline{F})} = \frac{0,02}{0,08} = \frac{1}{4} = 0,25$.
- d. Arbre pondéré :



2. a. D'après la loi des probabilités totales on a : $p(S) = p(S \cap F) + p(S \cap \bar{F}) = 0,92 \times 0,95 + 0,08 \times 0,75 = 0,874 + 0,06 = 0,934$.
- b. Il faut trouver la probabilité conditionnelle $p_S(F) = \frac{p(S \cap F)}{p(S)} = \frac{0,874}{0,934} \approx 0,9357 \approx 0,936$.
3. a. Loi de probabilité de B :

évènement	$F \cap S$	$\bar{F} \cap S$	reste
probabilité	0,874	0,06	0,066
bénéfice : b €	10	5	0

- b. On a $E(B) = 0,874 \times 10 + 0,06 \times 5 + 0,166 \times 0 = 8,74 + 0,30 = 9,04$ € (ce qui représente le bénéfice moyen par jouet).
4. On a une épreuve de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et de probabilité $p(S) = 0,934$.
La probabilité cherchée est égale à celle d'avoir 8, 9 ou 10 jouets solides, soit :

$$\binom{10}{8} 0,934^8 \times (1-0,934)^2 + \binom{10}{9} 0,934^9 \times (1-0,934)^1 + \binom{10}{10} 0,934^{10} \times (1-0,934)^0 = 0,113521 + 0,356998 + 0,505206 \approx 0,975725 \approx 0,976.$$

EXERCICE 4

7 points

Partie I

1. Équation E_2 : $x^2 = 2^x$.
On a $2^2 = 2^2$ et $4^2 = 2^4$: 2 et 4 sont solutions de E_2 .
2. $a^a = a^a$: donc a est solution de E_a .
3. Équation E_e : $x^e = e^x$. Étude de la fonction h définie par : $h(x) = x - e \ln x$.
- a. Question de cours : on sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$. Quelque soit t il existe x tel que $t = \ln x$.
Donc $\frac{e^t}{t} = \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = \frac{x}{\ln x}$.
D'après l'hypothèse initiale $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$, car $t \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow +\infty$.
Finalement en prenant l'inverse : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
- b. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$.
On peut écrire $h(x) = x \left(1 - e \frac{\ln x}{x}\right)$. D'après la question de cours la parenthèse a pour limite 1, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.
- c. h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $h'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}$.
Si $x > e$, $h'(x) > 0$ et h est croissante ;
Si $x < e$, $h'(x) < 0$ et h est décroissante. D'où le
- d. Tableau de variations de h

x	0	e	$+\infty$
$h'(x)$		-	0
			+
$h(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		\searrow	\nearrow
		0	

On a $h(e) = e - e \ln e = e - e = 0$. D'après ce tableau $h(x) = 0 \iff x = e$.
 L'équation $E_e \quad x^e = e^x$ est équivalente (en prenant le logarithme népérien) à $e \ln x = x \iff h(x) = 0$.
 Conclusion : l'équation E_e a une solution unique e .

Partie II

1. $x > 0, x \in \mathbb{R}$. x solution de $E_a \iff x^a = a^x \iff a \ln x = x \ln a \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$.

2. a. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* .

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

D'après 1. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b. f est dérivable comme fonction quotient de fonctions dérivables (avec $x \neq 0$) et $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

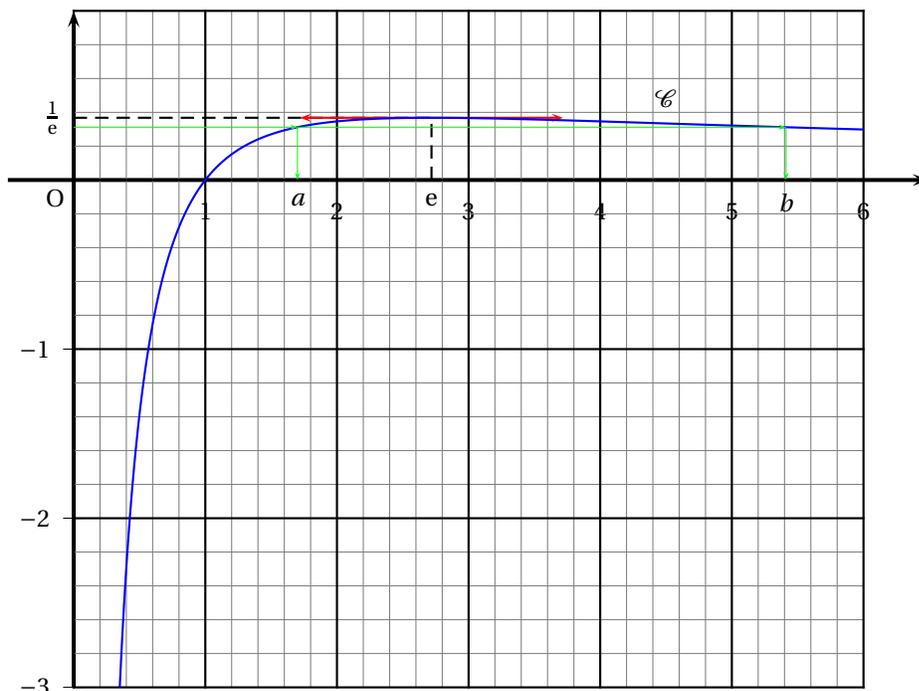
$$f'(x) > 0 \iff 1 - \ln x > 0 \iff \ln x < \ln e \iff x < e.$$

De même $f'(x) < 0 \iff x > e$. D'où le

c. Tableau de variations de f :

x	0	e	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{1}{e}$	0

d. Tracé de \mathcal{C}



3. D'après le graphe précédent :

- Si $0 < a \leq 1$ tout nombre négatif a un unique antécédent par f , donc la seule solution de E_a est a .
- Si $1 < a < e$ ou si $a > e$, tout nombre positif (compris entre 0 et $\frac{1}{e}$) a deux antécédents par f : a et b .