Corrigé du baccalauréat S - 2007

Exercice 1

1. **Modélisation de l'expérience aléatoire** : l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons (choix non ordonnés et sans répétition) de trois éléments distincts pris dans l'ensemble des huit boules $\{N1, N2, N3, R1, R2, R3, R4, R5\}$.
   On choisit la probabilité équirépartie sur cet univers Ω.
   On sait que $\text{Card}(\Omega) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$

   (a) Cette probabilité est $\dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}{56} = \dfrac{1}{56}$. Réponse **A**.

   (b) La probabilité de tirer 3 boules rouges est $\dfrac{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}{56} = \dfrac{10}{56}$. La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est alors $\dfrac{1}{56} + \dfrac{10}{56} = \dfrac{11}{56}$. Réponse **A**.

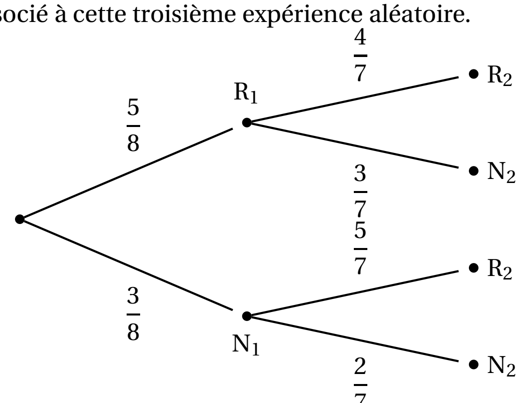
2. On répète 5 fois, dans des conditions identiques et indépendantes, la même épreuve de Bernoulli qui consiste à tirer une boule de l'urne. Les issues contraires de cette épreuve sont : «la boule tirée est noire» (succès de probabilité $p = 3/8$) et «la boule tirée est rouge» (échec de probabilité $q = 1 - p = 5/8$).
   Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires obtenues au cours de ces 5 épreuves. On sait alors que $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathscr{B}(5, 3/8)}$

   Pour tout entier k compris entre 0 et 5, $P(X = k) = \begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix} \left(\dfrac{3}{8}\right)^k \left(\dfrac{5}{8}\right)^{5-k}$

   (a) $P(X = 5) = \left(\dfrac{3}{8}\right)^5$. Réponse **B**.

   (b) $P(X = 2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\dfrac{3}{8}\right)^2 \left(\dfrac{5}{8}\right)^3$. Réponse **C**.

3. Construisons l'arbre pondéré associé à cette troisième expérience aléatoire.



   (a) $P_{R_1}(R_2)$ est la probabilité de tirer une boule rouge dans une urne contenant 7 boules : 4 rouges et 3 noires. Donc $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{4}{7}$. Réponse **B**.

   (b) $P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(N_2) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{15}{56}$. Réponse **C**.

   (c) D'après la formule des probabilités totales :
   $P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{20 + 15}{56} = \dfrac{35}{56} = \dfrac{5}{8}$
   Réponse **A**.

   (d) $P_{N_2}(R_1) = \dfrac{P(R_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \dfrac{P(R_1 \cap N_2)}{1 - P(R_2)} = \dfrac{15/56}{3/8} = \dfrac{5}{7}$. Réponse **C**.

Exercice 2 (obligatoire)

Partie I

On pose $z = x + iy$ avec x et y réels. Alors $\Re\text{e}(z) = x$ et $\Im\text{m}(z) = y$.

1. $\overline{z} = -z \Leftrightarrow x - iy = -(x+iy) \Leftrightarrow x - iy = -x - iy \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   $\Leftrightarrow \Re\text{e}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ où $i\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des imaginaires purs.

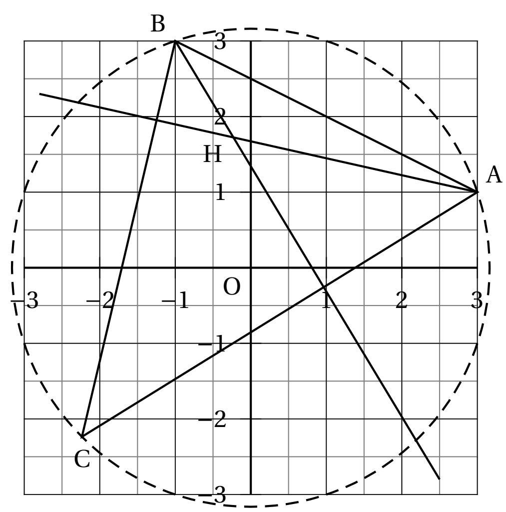
2. $\overline{z} = z \Leftrightarrow x - iy = x + iy \Leftrightarrow -2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \Im\text{m}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

3. Par définition, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ d'où $|z|^2 = x^2 + y^2$
   De plus, $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$
   Par conséquent $z\overline{z} = |z|^2$

Partie II

1. $OA = |a| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$; $OB = |b| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$;
   $OC = |c| = \sqrt{5+5} = \sqrt{10}$
   Donc $OA = OB = OC$ ce qui signifie que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Le point H a pour affixe $h = (2 - \sqrt{5}) + (4 - \sqrt{5})i$
   Les points A et B se placent aisément. Le point C appartient au cercle de centre O, de rayon OA et à la droite d'équation réduite $y = x$. Pour placer le point H, on utilise la calculatrice et on obtient $h \approx -0,24 + i \times 1,76$



On « voit » que H est l'orthocentre de ABC

Partie III

1. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC
   ssi $OA = OB = OC$ ssi $OA^2 = OB^2 = OC^2$
   ssi $|a|^2 = |b|^2 = |c|^2$
   ssi $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}$ (d'après le résultat établi en I-3.)

2. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$

   (a) En utilisant les propriétés de la conjugaison (pour tous complexes z et z', $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ et $\overline{\overline{z}} = z$), on obtient :
   $\overline{w} = \overline{\overline{b}c - b\overline{c}} = \overline{\overline{b}}\,\overline{c} - \overline{b}\,\overline{\overline{c}} = b\overline{c} - \overline{b}c = -(\overline{b}c - b\overline{c}) = -w$
   On en déduit que w est imaginaire pur.

   (b) • $(b+c)(\overline{b} - \overline{c}) = b\overline{b} - b\overline{c} + c\overline{b} - c\overline{c} = (b\overline{b} - c\overline{c}) + (\overline{b}c - b\overline{c})$
   Or $b\overline{b} = c\overline{c}$ d'après III-1. Donc $(b+c)(\overline{b} - \overline{c}) = \overline{b}c - b\overline{c} = w$
   • $\dfrac{w}{|b-c|^2} = \dfrac{(b+c)(\overline{b} - \overline{c})}{(b-c)(\overline{b-c})} = \dfrac{(b+c)(\overline{b} - \overline{c})}{(b-c)(\overline{b} - \overline{c})} = \dfrac{b+c}{b-c}$

   (c) On sait que w est imaginaire pur et que $\dfrac{1}{|b-c|^2}$ est un nombre réel (strictement positif).
   Il s'ensuit que $\dfrac{1}{|b-c|^2} \times w$ est un imaginaire pur
   c.à.d. que $\dfrac{b+c}{b-c}$ est un imaginaire pur.

3. L'énoncé sous-entend que $b+c \neq 0$ (ou que ABC n'est pas rectangle en A).

   (a) Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AH}} = h - a = b + c$
   Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{CB}} = b - c$

   (b) $\left(\overrightarrow{CB}\,,\,\overrightarrow{AH}\right) = \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{AH}\right) - \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{CB}\right) = \arg(z_{\overrightarrow{AH}}) - \arg(z_{\overrightarrow{CB}})$
   $= \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right) = \arg\left(\dfrac{b+c}{b-c}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \qquad$ avec $k \in \mathbb{Z}$
   car $\dfrac{b+c}{b-c}$ est un imaginaire pur **non nul**.

   (c) L'énoncé sous-entend de plus que $a+c \neq 0$ (ou que ABC n'est pas rectangle en B). D'après la question précédente, $(CB) \perp (AH)$ et $(CA) \perp (BH)$.
   Le point H appartient donc à deux hauteurs du triangle ABC.
   En conséquence $\boxed{H \text{ est l'orthocentre}}$ du triangle ABC.

Exercice 2 (spécialité)

Partie I

On note s la similitude plane directe d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\,;\,1\}$.
Un point M d'affixe z est invariant par s ssi $z = az + b$ ce qui équivaut à $z - az = b$ c.à.d. $z = \dfrac{b}{1-a}$
s admet donc un unique point invariant Ω appelé centre de s et d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

Partie II

1. g admet pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a = i\sqrt{2}$ et $b = 2i\sqrt{2} - 2$.
   g est la similitude directe de centre le point Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{2i\sqrt{2}-2}{1-i\sqrt{2}}$
   $= \dfrac{-2(1-i\sqrt{2})}{1-i\sqrt{2}} = -2$, de rapport $|a| = \sqrt{2}$ et d'angle $\arg(a) = \dfrac{\pi}{2}$

2. $M(z) \xmapsto{s} M_1(z_1 = \overline{z}) \xmapsto{g} M'(z' = i\sqrt{2}\,z_1 + 2i\sqrt{2} - 2)$
   Nous avons $f = g \circ s$ où s est la transformation d'écriture complexe $z' = \overline{z}$.
   s est donc la réflexion d'axe (Ox).

Partie III

1. Soit M un point d'affixe $z = x + iy$ avec x et y réels.
   $M = f(M) \Leftrightarrow z = i\sqrt{2}\,\overline{z} + 2i\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow x + iy = i\sqrt{2}\,(x - iy) + 2i\sqrt{2} - 2$
   $\Leftrightarrow x + iy = y\sqrt{2} - 2 + i(x\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y\sqrt{2} - 2 \\ y = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} x = (2x+4) - 2 \\ y = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 2 \\ y = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -2$
   Ainsi le point $\boxed{\Omega(-2) \text{ est l'unique point invariant par } f}$

2. Soit N un point de $\mathscr{D}$. Alors il existe un réel x tel que N ait pour affixe $n = x + i(x+2)$
   L'image de N par f est le point $f(N)$ d'affixe
   $n' = i\sqrt{2}\,\overline{n} + 2i\sqrt{2} - 2 = i\sqrt{2}(x - ix - 2i) + 2i\sqrt{2} - 2 = ix\sqrt{2} + x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 2$
   $= (\underbrace{x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2}_{x'}) + i(\underbrace{x\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}_{y'})$
   On constate que $y' = x' + 2$. Il en résulte que $f(N)$ appartient à $\mathscr{D}$.

3. σ est la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ et $k = f \circ \sigma$

(a) En tant que similitude indirecte, σ admet une écriture complexe du type $z' = a\overline{z} + b$. Or les points $A(-2)$ et $B(2i)$ sont invariants par σ.
D'où le système d'égalités : $\left\{\begin{array}{l} -2 = -2a + b \\ 2i = -2ia + b \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{l} b = 2a - 2 \\ 2i = -2ia + b \end{array}\right.$.
On en déduit que $2i = -2ia + 2a - 2 \Rightarrow 2 + 2i = a(2 - 2i) \Rightarrow a = \dfrac{1+i}{1-i}$
D'où $a = \dfrac{(1+i)^2}{2} = i$. Puis $b = 2a - 2 = -2 + 2i$. Ainsi

$$\boxed{\sigma\ :\ z' = i\overline{z} - 2 + 2i}$$

(b) Déterminons l'écriture complexe de $k = f \circ \sigma$.
$M(z) \xmapsto{\sigma} M_1(z_1) \xmapsto{f} M'(z')$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} z_1 = i\overline{z} - 2 + 2i \\ z' = i\sqrt{2}\,\overline{z_1} + 2i\sqrt{2} - 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z_1 = i\overline{z} - 2 + 2i \\ z' = i\sqrt{2}\left(\overline{i\overline{z} - 2 + 2i}\right) + 2i\sqrt{2} - 2 \end{array}\right.$$

Ainsi k admet pour écriture complexe $z' = i\sqrt{2}(-iz - 2 - 2i) + 2i\sqrt{2} - 2$
Finalement l'écriture complexe de k est $\boxed{z' = \sqrt{2}\,z + 2\sqrt{2} - 2}$

(c) On reconnaît l'écriture complexe de l'homothétie de centre le point d'affixe $\dfrac{2\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{1-\sqrt{2}} = -2$ (c'est le point Ω) et de rapport $\sqrt{2}$

4. $k = f \circ \sigma$ d'où $k \circ \sigma = (f \circ \sigma) \circ \sigma$ d'où $k \circ \sigma = f \circ (\sigma \circ \sigma)$
Or on sait que $\sigma \circ \sigma =$Id. Ainsi $\boxed{f = k \circ \sigma}$

Exercice 3

Partie I

1. Pour tout réel x de I, $f'(x) \neq 0$. Alors la droite T n'est pas parallèle à l'axe $(O;\ \overrightarrow{i}\ )$. Donc T coupe l'axe $(O;\ \overrightarrow{i}\ )$ en un unique point H dont l'abscisse X_T est la solution de l'équation d'inconnue X : $f'(x)(X - x) + f(x) = 0$

$f'(x)(X - x) + f(x) = 0 \iff f'(x)(X - x) = -f(x) \iff X - x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$
$\iff X = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ Ainsi

$$\boxed{X_T = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}}$$

2. T admet une équation réduite du type $Y = aX + b$. Alors la droite T n'est pas parallèle à l'axe $(O;\ \overrightarrow{j}\ )$. Donc T coupe l'axe $(O;\ \overrightarrow{j}\ )$ en un unique point K dont l'odonnée Y_T vérifie $Y_T = f'(x)(0 - x) + f(x)$ $\boxed{Y_T = f(x) - x f'(x)}$

Partie II

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, k fixé et f une fonction dérivable sur un $\mathbb{R}$ telle que
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \neq 0$.

1. f vérifie la propriété 1
ssi $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - X_T = k$
ssi $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - \left(x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}\right) = k$
ssi $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{f(x)}{f'(x)} = k$
ssi $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = k f'(x)$
ssi $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{k} f(x)$
ssi f est une solution de l'équation différentielle $\boxed{y' = \dfrac{1}{k} y}$

2. On sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{\frac{1}{k}x}$ où λ désigne une constante réelle.
On sait aussi que l'équation différentielle $y' = 2y$ admet une unique solution satisfaisant à la condition initiale $y(0) = 1$. Cette solution est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{2x}$ où λ vérifie $\lambda \mathrm{e}^{2\times 0} = 1$. Donc $\lambda = 1$ puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{2x}}$

Partie III

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, k fixé et f une fonction dérivable sur $I =]0, +\infty[$ telle que
$\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$.

1. f vérifie la propriété 2
ssi $\forall x \in I, \quad f(x) - Y_T = k$
ssi $\forall x \in I, \quad f(x) - \left(f(x) - x f'(x)\right) = k$
ssi $\forall x \in I, \quad x f'(x) = k$
ssi $\forall x \in I, \quad f'(x) = \dfrac{k}{x}$
ssi f est une solution sur I de l'équation différentielle $\boxed{y' = \dfrac{k}{x}}$

2. Les solutions de cette équation différentielle sont les primitives sur I de la fonction $u : x \mapsto k \times \dfrac{1}{x}$. Ces solutions sont donc les fonctions $x \longmapsto k \ln x + \lambda$ où λ désigne une constante réelle. On sait de plus qu'une fonction u continue sur un intervalle I admet une seule primitive sur I qui prend une **valeur donnée** en un **point donné**. Dès lors il existe une unique solution de $y' = \dfrac{1/2}{x}$ satisfaisant à la condition $y(1) = 0$.
Cette solution est la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln x + \lambda$ où λ vérifie $\dfrac{1}{2} \ln 1 + \lambda = 1$. Donc $\lambda = 1$ puis $\forall x > 0$, $\boxed{f(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \ln x}$

Exercice 4

Partie I

1. $(E) : \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x} \iff x\mathrm{e}^x = 1 \iff x = \mathrm{e}^{-x} \iff x - \mathrm{e}^{-x} = 0 \iff f(x) = 0$

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$. Or pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Donc pour tout réel x, $f'(x) > 1 > 0$.
Ainsi la fonction $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

(b) • $f(0) = -1$. Alors $x < 0 \Longrightarrow f(x) < f(0) \Longrightarrow f(x) < -1 \Longrightarrow f(x) < 0$
L'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $]-\infty, 0[$.

• $f(1) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Alors $x > 1 \Longrightarrow f(x) > f(1) \Longrightarrow f(x) > 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \Longrightarrow f(x) > 0$
L'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

• La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$. Donc d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f réalise une bijection de $[0,1]$ sur l'intervalle image de $[0,1]$ par f à savoir

$$f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[-1, 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$$

Puisque $0 \in f([0,1])$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,1]$.

(c) • $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx -0,1$ à 10^{-1} près par excès.
• $f(1) \approx 0,6$ à 10^{-1} près par défaut.

• Donc $f(1/2) \leq -0,1 < 0 < 0,6 \leq f(1)$ avec $0 = f(\alpha)$

d'où $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(\alpha) < f(1)$

Il en résulte par croissance de f sur $\mathbb{R}$ que $\dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

(d) $x \in [0, \alpha] \Longrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha) \Longrightarrow -1 \leq f(x) \leq 0$ car $f(\alpha) = 0$
Ainsi f est négative sur $[0, \alpha]$.

Partie II

1. $g(x) = x \Longleftrightarrow \dfrac{1+x}{1+\mathrm{e}^x} = x \Longleftrightarrow 1 + x = x(1+\mathrm{e}^x) \Longleftrightarrow 1 + x = x + x\mathrm{e}^x$
$\Longleftrightarrow 1 = x\mathrm{e}^x \Longleftrightarrow \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x}$

2. On a vu en I-2.(b) que α était l'unique solution dans $[0,1]$ de l'équation $f(x) = 0$ qui est équivalente à $g(x) = x$.
En conséquence α est l'unique solution dans $[0,1]$ de l'équation $g(x) = x$.

3. La fonction g est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout x de $[0,1]$,

$$g'(x) = \frac{1(1+\mathrm{e}^x) - (1+x)\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{1 + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{1 - x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{-\mathrm{e}^x(x - \mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$$

Donc pour tout x de $[0,1]$, $\boxed{g'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^x f(x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2}}$

Puisque $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} > 0$, $g'(x)$ et $f(x)$ sont de signes contraires.
Donc, d'après I - 2 (d), f étant positive sur $[0, \alpha]$, pour tout x de $[0, \alpha]$, $g'(x) \geq 0$.
Ainsi la fonction g est croissante sur $[0, \alpha]$.

Partie III

1. Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ »

• **Initialisation** : vérifions la propriété au rang 0.
$u_0 = 0$ et $u_1 = g(0) = 1/2$. Or d'après I-2.(c), $\dfrac{1}{2} \leq \alpha$. Donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$.

• **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie. Démontrons alors, sous cette hypothèse, que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
On sait que g est croissante sur $[0, \alpha]$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \alpha$
Donc $g(0) \leq g(u_k) \leq g(u_{k+1}) \leq g(\alpha)$
avec $g(0) = 1/2$; $g(u_k) = u_{k+1}$; $g(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et $g(\alpha) = \alpha$
Par conséquent $0 \leq \dfrac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$ et $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

• **Conclusion** : le principe de récurrence permet de conclure que pout tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

2. $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

   Cette suite est également majorée par α. Il en résulte d'après le théorème de convergence monotone, que la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$

3. Notons ℓ la limite de la suite (u_n). Alors il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
   Puisque $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \alpha$, on obtient par passage à la limite dans cet encadrement : $0 \leq \ell \leq \alpha$. En particulier $\ell \in [0, 1]$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et g est continue sur $[0;1]$ donc g est continue au point ℓ .
   D'où $\lim\limits_{x\to\ell} g(x) = g(\ell)$. On en déduit par composition que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell)$
   Or par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = g(\ell)$. Par unicité de la limite d'une suite, on en déduit que $\boxed{g(\ell) = \ell}$ autrement dit ℓ est une solution dans $[0, 1]$ de l'équation $g(x) = x$.

   Or cette équation admet α pour unique solution. Donc $\boxed{\ell = \alpha}$

4. La calculatrice fournit $\boxed{u_4 \approx 0,567\,143}$ à 10^{-6} près par défaut (valeur arrondie).