Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
f est une fonction dérivable et $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax} = af(x)$.
f est donc solution de l'équation $y' = ay$

   b. Si g est une solution de l'équation $y' = a.y$, alors $g'(x) = ag(x)$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. La fonction h produit de fonctions dérivales est dérivable et :
$h'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{-ax} - ag(x)\mathrm{e}^{-ax} = ag(x)\mathrm{e}^{-ax} - ag(x)\mathrm{e}^{-ax} = 0$. Or $g'(x) = 0 \Rightarrow g = K$ avec $K \in \mathbb{R}$. h est une fonction constante.

   c. Toute fonction solution de $y' = ay$ est de la forme $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax} = K \iff g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$. Donc toute solution de l'équation $y' = ay$ s'écrit $K\mathrm{e}^{ax}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

2. (E) : $y' = 2y + \cos x$.

   a. $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$. f_0 somme de fonctions dérivables est dérivable et $f_0'(x) = -a\sin x + b\cos x$.
f_0 est solution de (E) si et seulement si :
$f_0'(x) = 2f_0(x)+\cos x \iff -a\sin x+b\cos x = 2(a\cos x+b\sin x)+\cos x \iff (a+2b)\sin x + (2a-b+1)\cos x = 0$ quel que soit x réel.
En particulier pour $x = 0$ et pour $x = \dfrac{\pi}{2}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2a-b+1 & = & 0\\ a+2b & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2a-b & = & -1\\ a & = & -2b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -5b & = & -1\\ a & = & -2b\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & \dfrac{1}{5}\\ a & = & -\dfrac{2}{5}\end{array}\right. \quad \text{Conclusion : } f_0(x) = -\frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x.$$

   b. D'après **1. a.** toute solution de l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$ est de la forme $f(x) = K\mathrm{e}^{2x}$ (avec $K \in \mathbb{R}$).

   c. Si f est solution de (E) et comme f_0 est aussi solution de (E), on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f'(x) & = & 2f(x) + \cos x\\ f_0'(x) & = & 2f_0(x) + \cos x\end{array}\right.$$

   D'où par différence membres à membres $f'(x) - f_0'(x) = 2\big(f(x) - f_0(x)\big) = 0$ ou par linéarité de la dérivabilité : $\big(f(x) - f_0(x)\big)' = 2\big(f(x) - f_0(x)\big)$ ce qui signifie que $f(x) - f_0(x)$ est solution de (E_0).

   d. D'après **2. b.**, on a donc $f(x) - f_0(x) = K\mathrm{e}^{2x} \iff f(x) = -\dfrac{2}{5}\sin x + \dfrac{1}{5}\cos x + K\mathrm{e}^{2x}$.

   e. k est solution de (E), donc $k(x) = -\dfrac{2}{5}\sin x + \dfrac{1}{5}\cos x + K\mathrm{e}^{2x}$. Or $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \iff k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{5} + K\mathrm{e}^{\pi} \iff K = \dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{-\pi}$.
On a donc $k(x) = -\dfrac{2}{5}\sin x + \dfrac{1}{5}\cos x + \dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{2x-\pi}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. L'écriture complexe d'une symétrie axiale (antidéplacement) est de la forme $z' = a\overline{z} + b$. A et B invariants par cette symétrie se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{lll} 1 & = & a \times 1 + b \\ \text{i} & = & a \times (-\text{i}) + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} 1 & = & a + b \\ \text{i} & = & -a(\text{i}) + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} 1 & = & a + b \\ 1 - \text{i} & = & a(1 + \text{i}) \end{array}\right. \iff$$

$$\text{(par différence)} \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1-\text{i}}{1+\text{i}} & = & a \\ 1 & = & a + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{-2\text{i}}{2} & = & a \\ 1 & = & a + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} -\text{i} & = & a \\ 1 + \text{i} & = & b \end{array}\right.$$

L'écriture complexe est donc : $z' = -\text{i}\overline{z} + 1 + \text{i}$.

2. $f = H \circ S$.

   a. La réflexion S est une similitude de centre A ; donc la composée de deux similitudes de même centre est une similitude de même centre A.

   b. Écriture complexe :
   – pour S, on a vu que l'écriture complexe est : $z' = -\text{i}\overline{z} + 1 + \text{i}$.
   – pour $H : \overrightarrow{\text{A}M''} = -2\overrightarrow{\text{A}M'} \iff z'' - 1 = -2(z' - 1) \iff z" = 1 - 2(z' - 1) = -2z' + 3$
   – donc $z" = -2\left(-\text{i}\overline{z} + 1 + \text{i}\right) + 3 = 2\text{i}\overline{z} + 1 - 2\text{i}$.
   Soit $M(z)$ tel que $\overrightarrow{\text{A}M''} = -2\overrightarrow{\text{A}M} \iff z'' - 1 = -2(z - 1) \iff 2\text{i}\overline{z} + 1 - 2\text{i} - 1 = -2z + 2 \iff 2\text{i}\overline{z} + 2z = 1 + 2\text{i}$. (1)
   En posant $z = x + \text{i}y$, $2\text{i}(x - \text{i}y) + 2(x + \text{i}y = 1 + 2\text{i}(1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} 2y + 2x & = & 2 \\ 2x + 2y & = & 2 \end{array}\right.$
   Les points $M(x\,;\,y)$ qui vérifient la relation sont tels que $x + y = 1$ qui est l'équation de la droite (AB).
   Inversement un point M de la droite (AB) a pour image par S M et ensuite on a bien par la transformation h, $\overrightarrow{\text{A}M''} = -2\overrightarrow{\text{A}M}$.
   L'ensemble cherché est donc toute la droite (AB).

   c. De même $\overrightarrow{\text{A}M''} = 2\overrightarrow{\text{A}M} \iff z'' - 1 = 2(z - 1) \iff 2\text{i}\overline{z} + 1 - 2\text{i} = 2z - 2 \iff 2\text{i}\overline{z} - 2z = -3 + 2\text{i}$ (2).
   Si $M(x\,;\,y)$, alors (2) $\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} 2y - 2x & = & -2 \\ 2x - 2y & = & 2 \end{array}\right.$
   Les points $M(x\,;\,y)$ sont tels que $x - y = 1$ qui est l'équation d'une droite perpendiculaire à (AB) (coefficient directeur 1, alors que celui de (AB) est -1), et qui contient le point A (le couple $(1\,;\,0)$ vérifie l'équation).
   Inversement un point M de la perpendiculaire trouvée a pour coordonnées $(x\,;\,x - 1)$.
   On vérifie que $z'' - 1 = 2\text{i}x + 2x - 2 - 2\text{i}$ et que
   $2(z - 1) = 2\text{i}x + 2x - 2 - 2\text{i}$.
   L'ensemble cherché est donc toute la perpendiculaire à (AB) contenant A.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $z_{\text{E}'} = \dfrac{1}{2}\left(-\text{i} + \dfrac{1}{-\text{i}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-\text{i} + \dfrac{\text{i}}{1}\right) = 0.$
   E a donc pour image O.

2. $M' = M \iff z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \iff 2z^2 = z^2 + 1 \iff z^2 = 1 \iff z = 1$ ou $z = -1$.
   Les points égaux à leur image sont donc les points d'affixe 1 et -1.

3. Soit $M(z)$ avec $z \neq 0,\ z \neq 1,\ z \neq -1$.

   a. $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1} = \dfrac{z+\frac{1}{z}+2}{z+\frac{1}{z}-2} = \dfrac{z^2+1+2z}{z^2+1-2z} = \dfrac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2.$

   b. $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 \Rightarrow \left|\dfrac{z'+1}{z'-1}\right| = \left|\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2\right| \iff \dfrac{|z'+1|}{|z'-1|} = \dfrac{\left|(z+1)^2\right|}{\left|(z-1)^2\right|} \iff$ $\dfrac{M'\mathrm{B}}{M'\mathrm{A}} = \left(\dfrac{M\mathrm{B}}{M\mathrm{A}}\right)^2.$

   De même avec les arguments :

   $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 \Rightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{A}M'}, \overrightarrow{\mathrm{B}M'}\right) = 2\left(\overrightarrow{\mathrm{A}M}, \overrightarrow{\mathrm{B}M}\right)$

   $\iff \left(\overrightarrow{M'\mathrm{A}}, \overrightarrow{M'\mathrm{B}}\right) = 2\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}}, \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right).$

4. a. $M \in \Delta \iff M\mathrm{A} = M\mathrm{B} \iff \dfrac{M\mathrm{B}}{M\mathrm{A}} = 1$. Donc d'après la question précédente : $\dfrac{M'\mathrm{B}}{M'\mathrm{A}} = 1 \iff M'\mathrm{B} = M'\mathrm{A} \iff M' \in \Delta$.

   b. Si M appartient au cercle de diamètre [AB], alors $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}}, \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

   Donc d'après la question précédente $\left(\overrightarrow{M'\mathrm{A}}, \overrightarrow{M'\mathrm{B}}\right) = \pi$, donc les points A, B et M' sont alignés ou encore $M' \in (\mathrm{AB})$.

   c. Le cercle Γ a un rayon égal à 1 et est centré en O. Tout point M de Γ a donc une affixe de la forme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M} = \theta$.

   On a donc $z' = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$

   $= \dfrac{1}{2}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta + \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = \cos\theta.$

   Or $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$, donc M' est un point du segment [AB].

   Seuls les points de [AB] ont un antécédent par f

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. $M(x\,;\,y) \in (d) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = t\vec{u} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-(-2) & = & t\times 1\\ y-8 & = & t\times 5\\ z-4 & = & t\times(-1)\end{array}\right.$

   $M(x\,;\,y) \in (d) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t\\ y & = & 8+5t\\ z & = & 4-t\end{array}\right.$

2. Les plans (P) et (Q) ont respectivement pour vecteur normal $(1\,;\,-1\,;\,-1)$ et $(1\,;\,0\,;\,-2)$ qui ne sont manifestement pas colinéaires. Ces deux plans n'étant pas parallèles sont sécants. Tout point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de leur droite commune (d') vérifie :

   $\left\{\begin{array}{lllcl} x & -y & -z & = & 7\\ x & & -2z & = & 11\end{array}\right.$, soit en posant $z = t$, $\left\{\begin{array}{lllcl} x & -y & -t & = & 7\\ x & & -2t & = & 11\\ & & z & = & t\end{array}\right. \iff$

   $\left\{\begin{array}{llcl} x \quad -y & & = & 7+t\\ x & & = & 11+2t\\ & z & = & t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llcl} x & & = & 11+2t\\ & y & = & 4+t\\ & z & = & t\end{array}\right.$ qui est une représentation paramétrique de la droite (d'), le vecteur de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,2)$ étant un vecteur directeur de cette droite.

3. (d) et (d') sont coplanaires s'il existe un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ dont les coordonnées vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcccr} x & = & -2+t & = & 11+2t'\\ y & = & 8+5t & = & 4+t'\\ z & = & 4-t & = & t'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} t-2t' & = & 13\\ 5t-t' & = & -4\\ 4-t & = & t'\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} t-8+2t & = & 13 \\ 5t+t-4 & = & -4 \\ 4-t & = & t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t & = & 7 \\ t & = & 0 \end{array}\right.$$

Conclusion : il n'existe pas de point commun aux deux droites : elles ne sont donc pas coplanaires.

4. **a.** $\mathrm{H}(-3\,;\,3\,;\,5) \in (d) \iff \left\{\begin{array}{lcl} -3 & = & -2+t \\ 3 & = & 8+5t \\ 5 & = & 4-t \end{array}\right.$ qui a une solution évidente $t=-1$.

$\mathrm{H}'(3\,;\,0\,;\,-4) \in (d') \iff \left\{\begin{array}{lcl} 3 & = & 11+2t \\ 0 & = & 4+t \\ -4 & = & t \end{array}\right.$ qui a pour solution évidente $t=-4$.

b. On a $\overrightarrow{\mathrm{HH}'}\,(6\,;\,-3\,;\,-9)$. Or $\overrightarrow{\mathrm{HH}'}\cdot\overrightarrow{u} = 6\times1-3\times5-9\times(-1) = 6-15+9=0$. Donc (HH') et (d) sont perpendiculaires ;
La droite (d') a un vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(2\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{HH}'}\cdot\overrightarrow{v} = 6\times2-3\times1-9\times1 = 12-3-9=0$. Donc (HH') et (d') sont perpendiculaires.

c. La droite (HH') est la perpendiculaire commune aux droites (d) et (d').
La distance HH' est la plus courte distance entre les droites (d) et (d').
$\mathrm{HH}'^2 = (3+3)^2+(-3)^2(-4-5)^2 = 36+9+81=126$.
D'où $\mathrm{HH}' = \sqrt{126} = \sqrt{9\times14} = 3\sqrt{14}$.

d. $M(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifie $\overrightarrow{M\mathrm{H}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HH}'} = 126 \iff (3-x)\times6+(0-y)\times(-3)+(-4-z)\times(-9)=126 \iff$ (en simplifiant par 3), $2(3-x)+y+3(4+z)=42 \iff 6-2x+y+12+3z=42 \iff -2x+y+3z=24$ qui est l'équation d'un plan contenant H, puisque $\overrightarrow{\mathrm{HH}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HH}'}=126$ (question précédente).

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

1. **a.** $f_1(x) = 2x-2+\ln\left(x^2+1\right)$. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2+1=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x^2+1\right)=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x-2$. Finalement par somme des limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty$.

b. f_1 est une somme de fonctions dérivables et $f_1'(x) = 2+\dfrac{2x}{x^2+1}$.

c. On a $2x \geqslant 0$, $x^2+1>0$, donc $\dfrac{2x}{x^2+1}$, et donc $f_1' \geqslant 2 > 0$.
La fonction est donc croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
$f_1(0)=-2$. D'où le tableau de variation :

x	0	α_1		$+\infty$
$f_1'(x)$			$+$	
$f_1(x)$	-2	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. $f_n(x) = 2x-2+\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}$.

a. Pour n fixé, on a encore $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}=+\infty$, et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$.

b. $f_n'(x) = 2 + \dfrac{2x}{n\left(x^2+1\right)}$.

Comme à la question 1, tous les termes sont positifs, donc $f_n'(x) > 0$. La fonction f_n est donc croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c. La fonction f_n est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$. Comme $f(0) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, il existe un réel unique α_n tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

d. On a $f_n(1) = \dfrac{\ln 2}{n}$.

On a donc $-2 < 0 < 1$ ou encore $f_n(0) < f_n(\alpha_n) < f_n(1)$ d'où par croissance de la fonction f_n, $0 < \alpha_n < 1$.

3. On sait que $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \iff 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right)}{\alpha_{n+1}} = 0 \iff 2\alpha_{n+1} - 2 = -\dfrac{\ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right)}{\alpha_{n+1}}$ (1).

D'autre part :

$f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right)}{n+1} = -\dfrac{\ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right)}{\alpha_{n+1}} + \dfrac{\ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right)}{n+1}$ en utilisant (1) $= \ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right)\left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right] = \ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right) \times \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Or $\alpha_{n+1}^2 \geqslant 0 \Rightarrow \alpha_{n+1}^2 + 1 \geqslant 1 \Rightarrow \ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right) \geqslant 0$. D'autre par $\dfrac{1}{n(n+1)} > 0$.

Conclusion $\ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right) \times \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$ ou encore $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

a. On vient de démontrer que $0 < f_n(\alpha_{n+1})$ ou encore $f_n(\alpha_n) < f_n(\alpha_{n+1})$.

D'où par croissance de la fonction f_n, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

Conclusion la suite (α_n) est donc croissante.

b. La suite est croissante et majorée par 1 : elle donc convergente vers une limite ℓ.

c. $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$ entraîne par limite au voisinage de plus l'infini que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.