Durée : 4 heures

Correction du baccalauréat S Polynésie septembre 2007

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Les courbes 2 et 3 ne vérifient pas P_3.
Par contre le courbe 1 semble représenter une fonction de (E) : en particulier la courbe est sous la droite $y = x$.

b. Une fonction f de (E) érifie P_3 donc $f(x) \leqslant x \iff x - f(x) \geqslant 0$. Comme $0 < 1$, I_f représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe, la droite (D) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Donc $I_f \geqslant 0$.

2. **a.** $h(x) = 2^x - 1 = \text{e}^{x\ln 2} - 1$. Cette fonction est dérivable et $h'(x) = \ln 2\text{e}^{x\ln 2} > 0$ car les deux facteurs sont positifs : la fonction h est donc croissante et vérifie P_1.
$h(0) = 1 - 1 = 0$ et $h(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$.
h vérifie P_2.

b. Soit $\varphi(x) = 2^x - x - 1$. Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables et
$\varphi'(x) = \ln 2\text{e}^{x\ln 2} - 1$ et
$\varphi''(x) = (\ln 2)^2\text{e}^{x\ln 2} > 0$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		α		1
φ''		$+$		$+$	
φ'	$\ln 2 - 1 < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2\ln 2 - 1 > 0$
φ	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Ce tableau montre que sur $[0\,;\,1]$, $\varphi(x) \leqslant 0 \iff 2^x - -1 - x \leqslant 0 \iff 2^x - 1 \leqslant x \iff h(x) \leqslant x$.
On a donc démontré que h vérifie la propriété P_3, donc appartient à (E).

c. $I_h = \displaystyle\int_0^1 \left[x - \left(2^x - 1\right)\right]\,\text{d}x = \int_0^1 \left[x - \text{e}^{x\ln 2} + 1\right]\,\text{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2^x}{\ln 2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.

3. **a.** P vérifie $P_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c & = & 0 \\ a + b + c & = & 1 \end{array}\right.$
Donc $c = 0$ et $b = 1 - a$. Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$,
$P(x) = ax^2 + (1 - a)x$.

- $P'(x) = 2ax + (1 - a)$. Sur $[0\,;\,1]$, $2ax \geqslant 0$ et $1 - a > 0$, donc $P'(x) > 0$: la fonction P est croissante sur $[0\,;\,1]$.

- $P(0) = 0$ et $P(1) = a + 1 - a = 1$. P vérifie P_2.

– Considérons $P(x)-x = ax^2+(1-a)x-x = ax^2-ax = ax(x-1)$. Comme $a>0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $x-1 \leqslant 0$, $P(x)-x \leqslant 0 \iff P(x) \leqslant x$. Donc P vérifie P_3 et finalement $P \in (E)$

b. $I_P = \displaystyle\int_0^1 \left[x - ax^2 - (1-a)x\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(ax - ax^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{ax^3}{3}\right]_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$.

c. $I_P = I_h \iff \dfrac{a}{6} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln 2} \iff a = 9 - \dfrac{6}{\ln 2}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** On a A(3 ; 0 ; 0), C(0 ; 3 ; 0) et E(3 ; 0 ; 3).

b. L barycentre du système {(C ; 2), (E ; 1)} $\iff 2\overrightarrow{\mathrm{LC}} + \overrightarrow{\mathrm{LE}} = 0$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\times(-x)+3-x & = & 0 \\ 2(3-y)+0-y & = & 0 \\ 2(0-z)+3-z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & x \\ 2 & = & y \\ 1 & = & z \end{array}\right.$. Donc L(1 ; 2 ; 1)

c. $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DL}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. **a.** $\overrightarrow{\mathrm{A}M}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a \end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{D}M} \iff \overrightarrow{\mathrm{D}M} = \overrightarrow{\mathrm{A}M} + \overrightarrow{\mathrm{DA}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3a \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{MN}$ orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AE}} \Rightarrow \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 0 \iff \left(\overrightarrow{M\mathrm{D}} + \overrightarrow{\mathrm{D}N}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 0 \iff -3a \times 3 + b \times 3 = 0 \iff 3a - b = 0$.

De même $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DL}} = 0 \iff \left(\overrightarrow{M\mathrm{D}} + \overrightarrow{\mathrm{D}N}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{DL}} = 0 \iff -3\times 1 - 3a \times 1 + b \times 1 + 2b \times 2 + b \times 1 \iff -3 - 3a + 6b = 0 \iff -a + 2b = 1$. D onc $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DL}}$ si et seulement si le couple $(a,\ b)$ vérifie le système $\left\{\begin{array}{rcl} -a+2b & = & 1 \\ 3a-b & = & 0 \end{array}\right.$

b. $\left\{\begin{array}{rcl} -a+2b & = & 1 \\ 3a-b & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -a+2b & = & 1 \\ 6a-2b & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow 5a = 1 \iff a = \dfrac{1}{5}$, puis $b = \dfrac{3}{5}$. Ce système a un seul couple solution.

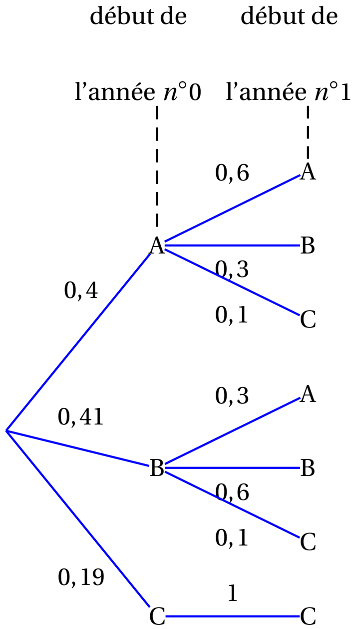
Il existe donc un seul point M_0 de (AE) de coordonnées $\left(3 ; 0 ; \frac{3}{5}\right)$ et un seul point N_0 de (DL) de coordonnées $\left(\frac{3}{5} ; \frac{6}{5} ; \frac{3}{5}\right)$ tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

c. On calcule $M_0N_0^2 = \left(\dfrac{6}{5} - 3\right)^2 + \left(\dfrac{6}{5}\right)^2 + 0^2 = \dfrac{144}{25} + \dfrac{36}{25} = \dfrac{180}{25} = \dfrac{36}{5}$.

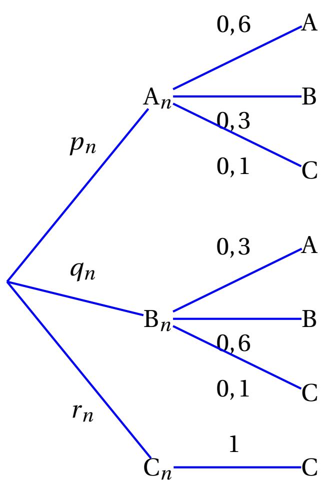
Donc la distance (la plus courte) entre (AE) et (DL) est égale à $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. 

2. **a.** Montrer que $p_1 = p(\text{A}\cap\text{A}) + p(\text{B}\cap\text{A}) = 0,4\times 0,6 + 0,41\times 0,6 = 0,24 + 0,123 = 0,363$.
De même puis calculer $q_1 = p(\text{A}\cap\text{B}) + p(\text{B}\cap\text{B}) = 0,4\times 0,3 + 0,41\times 0,6 = 0,12 + 0,3246 = 0,366$.
Et $r_1 p(\text{A}\cap\text{C}) + p(\text{B}\cap\text{C}) + p(\text{C}\cap\text{C}) = 0,4\times 0,1 + 0,41\times 0,1 + 0,19\times 1 = 0,04 + 0,041 + 0,19 = 0,271$.
On vérifie que $0,363 + 0,366 + 0,271 = 1,000$

b. 

En reprenant les deux premières branches en remplaçant A par A_n (avec une probabilité p_n d'y arriver) et B par B_n (avec une probabilité q_n d'y arriver), on obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_{n+1} & = & 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} & = & 0,3p_n + 0,6q_n \end{array}\right.$$

3. **a.** $S_n = q_n + p_n$ donc $S_{n+1} = q_{n+1} + p_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n + 0,6p_n + 0,3q_n = 0,9q_n + 0,9p_n = 0,9\left(q_n + p_n\right) = 0,9S_n$ ce qui montre que la suite (S_n) est une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme $q_0 + p_0 = 0,81$.
De même $D_n = q_n - p_n$, donc $D_{n+1} = q_{n+1} - p_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n - \left(0,6p_n + 0,3q_n\right) = 0,3q_n - 0,3p_n = 0,3\left(q_n - p_n\right) = 0,3D_n$. Donc (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3 de premier terme $q_0 - p_0 = 0,01$.

b. On sait que $S - nD = (0,9)^n \cdot S_0 = (0,9)^n \times 0,81$.
or $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$. (car $-1 < 0,9 < 1$)
Même limite pour la suite (D_n).

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} q_n$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} 2p_n = 0$ ou encore

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} q_n = 0.$$

D'après la loi des probabilités totales on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = 1.$$

Cela signifie qu'à longue échéance il n'y aura plus que des plantes du type C (ce qui semble normal puisque seules celles-ci se remplacent, alors que celles du type A et B se ra réfient.)

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies sur la feuille jointe en annexe . Cette feuille ne sera pas remise avec la copie.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport 2 et d'angle θ. Soit :

- les points A′ et B′, images respectives des points A et B par la similitude σ ;
- les points I, milieu du segment [A′ B] et J, milieu du segment [A B′] ;
- le point M milieu du segment [AA′] ;
- Je point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AR) et le point H′ image du point H par la similitude σ.

Partie A. Étude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6+4\text{i}$, le point B a pour affixe $2+4\text{i}$, et le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), a donc pour affixe 4i.

La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. L'écriture complexe de la similitude σ est $z' = \dfrac{\text{i}}{2}z$.

   On a donc $z_{\text{A}'} = \dfrac{\text{i}}{2}(-6+4\text{i}) = -2-3\text{i}$.

   $z_{\text{B}'} = \dfrac{\text{i}}{2}(2+4\text{i}) = -2+\text{i}$.

   $z_{\text{H}'} = \dfrac{\text{i}}{2}(4\text{i}) = -2$.

2. I a pour affixe $\dfrac{\text{i}}{2}$, J $\left(-4+\dfrac{5\text{i}}{2}\right)$.

   l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{IJ}}$ est donc $(-4+2\text{i})$ et celle du vecteur $\overrightarrow{\text{HH}'}$ $(-2-4\text{i})$.
   On a donc $\overrightarrow{\text{IJ}} \cdot \overrightarrow{\text{HH}'} = (-4)\times(-2)+2\times(-4) = 8-8 = 0$, ce qui montre que ces vecteurs sont orthogonaux et donc que (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH′).

Partie B. Étude du cas général

1. **a.** On sait que (OH) $\perp$ (AB) : la similitude conservant les angles, on en déduit que (OH′) $\perp$ (A′B′).
   D'autre part une simitude conservant l'alignement :
   H $\in$ (AB) entraîne que H′ $\in$ (A′B′).
   Conclusion : le point H′ est le projeté orthogonal de O sur la droite (A′B′).

b. Dans le triangle AA′B la droite (MI) est la droite des « milieux » : donc $\overrightarrow{\text{MI}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}$.

On admet que $\overrightarrow{\text{MJ}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{A}'\text{B}'}$. (même théorème)

c. On en déduit que $\dfrac{\text{MJ}}{\text{MI}} = \dfrac{\text{A}'\text{B}'}{\text{AB}} = 2$ (rapport de la similitude).

Or on sait d'après la question précédente que $\dfrac{\text{OH}'}{\text{OH}} = \dfrac{\text{A}'\text{B}'}{\text{AB}} = 2$; donc finalement $\dfrac{\text{MJ}}{\text{MI}} = \dfrac{\text{OH}'}{\text{OH}}$.

D'autre part (MB) étant parallèle à (AB) et (MJ) parallèle à (A′B′), on a $\left(\overrightarrow{\text{MI}}, \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{A}'\text{B}'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OH}}, \overrightarrow{\text{OH}'}\right)$ à $2k\pi$, près.

Donc finalement $\left(\overrightarrow{\text{MI}}, \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OH}}, \overrightarrow{\text{OH}'}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. On considère les points M, I et J et leurs images respectives O, H et K par s.

a. On a $\dfrac{\text{MJ}}{\text{MI}} = \dfrac{\text{OK}}{\text{OH}} = \dfrac{\text{OH}'}{\text{OH}}$ (d'après la question précédente) ; donc OK= OH′.
De même $\left(\overrightarrow{\text{MI}}, \overrightarrow{\text{MJ}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OH}}, \overrightarrow{\text{OK}}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} = \left(\overrightarrow{\text{OH}}, \overrightarrow{\text{OH}'}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} = \theta + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b. On en déduit que le point H′ est le point K, donc l'image du point J par la similitude s.

3. L'angle $\left(\overrightarrow{\text{IJ}}, \overrightarrow{\text{HH}'}\right)$ est égal à l' angle de la similitude s ; il en est de même pour l'angle $\left(\overrightarrow{\text{MI}}, \overrightarrow{\text{OH}}\right)$.
Donc $\left(\overrightarrow{\text{IJ}}, \overrightarrow{\text{HH}'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{MI}}, \overrightarrow{\text{OH}}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Montrer que $\left(\overrightarrow{\text{IJ}}, \overrightarrow{\text{HH}'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{MI}}, \overrightarrow{\text{OH}}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
On a vu que (OH) ⊥ (AB) et que (MI) est parallèle à (AB), donc (MI) est perpendiculaire à (OH). L'angle de la similitude s est donc égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
D'après l'égalité ci-dessus la droite (IJ) est donc perpendiculaire à la droite (HH′).