Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

$n=3,\ b=7,\ r=5.$

$p(\text{G})=p(nn)+p(bb)+p(rr)=\dfrac{3}{15}\times\dfrac{2}{14}+\dfrac{7}{15}\times\dfrac{6}{14}+\dfrac{5}{15}\times\dfrac{4}{14}=\dfrac{6+42+20}{15\times 14}=\dfrac{68}{210}=\dfrac{34}{105}.$

Partie B

1. $g(n,\ b,\ r)=\dfrac{n}{15}\times\dfrac{n-1}{14}+\dfrac{b}{15}\times\dfrac{b-1}{14}+\dfrac{r}{15}\times\dfrac{r-1}{14}=\dfrac{1}{210}[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)].$

2. **a.** L'équation du plan NBR est $ax+by+cz+d=0$. En écrivant que N, B et R appartiennent à ce plan, on trouve $15a+d=0,\ 15b+d=0,\ 15c+d=0$, soit $a=-\dfrac{d}{15}=b=c$.
En prenant $d=15$, on trouve qu'une équation du plan (NBR) est
$x+y+z-15=0$.

b. On sait que $n+b+r=15 \iff M\in(\text{NBR})$.

c. $g(n,\ b,\ r)=\dfrac{1}{120}\left[n^2-n+b^2-b+r^2-r\right]=\dfrac{1}{120}\left[n^2+b^2+r^2-(n+b+r)\right]=$
$\dfrac{1}{120}\left[\text{O}M^2-15\right]$. (puisque $n+b+r=15$ d'après le b.

d. Le vecteur $\overrightarrow{\text{OH}}$ est un vecteur normal au plan (NBR), donc a pour coordonnées $(\alpha\ ;\ \alpha\ ;\ \alpha)$ qui sont aussi les coordonnées du point H.
Or H ? (NBR) $\iff \alpha+\alpha+\alpha=15 \iff 3\alpha=15 \iff \alpha=5$.
Conclusion H(5 ; 5 ; 5).

e. On sait que la distance minimale du point O à un point du plan (NBR) est la distance de O au projeté orthogonal de O sur ce plan soit H. On a vu que $g(n,b,r)=\dfrac{1}{120}\left[\text{OM}^2-15\right]$. Cette probabilité est minimale quand $M=\text{H}$. Dans ce cas $g(n,b,r)=\dfrac{1}{120}\left[\text{OH}^2-15\right]=\dfrac{1}{120}\left[5^2+5^2+5^2-15\right]=\dfrac{60}{210}=$
$g_{\text{mini}}(n,\ b,\ r)=\dfrac{2}{7}$.

Partie C

1. On a $p(\text{G})=\dfrac{2}{7}$. Si deux boules de même couleur sortent il touche $kx?x$ et dans le cas contraire le « gain » sera de $-x$. Donc $\text{E}(X)=\dfrac{2}{7}(kx-x)+\dfrac{5}{7}\times(-x)=\dfrac{x}{7}(2k-7)$.

2. Le jeu est équitable si $\text{E}(x)=0 \iff \dfrac{x}{7}(2k-7) \iff k=\dfrac{7}{2}=3,5$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. α est tel que $\begin{cases} \alpha(1+\mathrm{i}) & = & 1+3\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\alpha^2 & = & -4+3\mathrm{i} \end{cases}$

   La première égalité donne $\alpha = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = 2+\mathrm{i}$.

   On a bien $\mathrm{i}(2+\mathrm{i})^2 = \mathrm{i}(4-1+4\mathrm{i}) = -4+3\mathrm{i}$.

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2-(1+3\mathrm{i})z+(-4+3\mathrm{i})$.

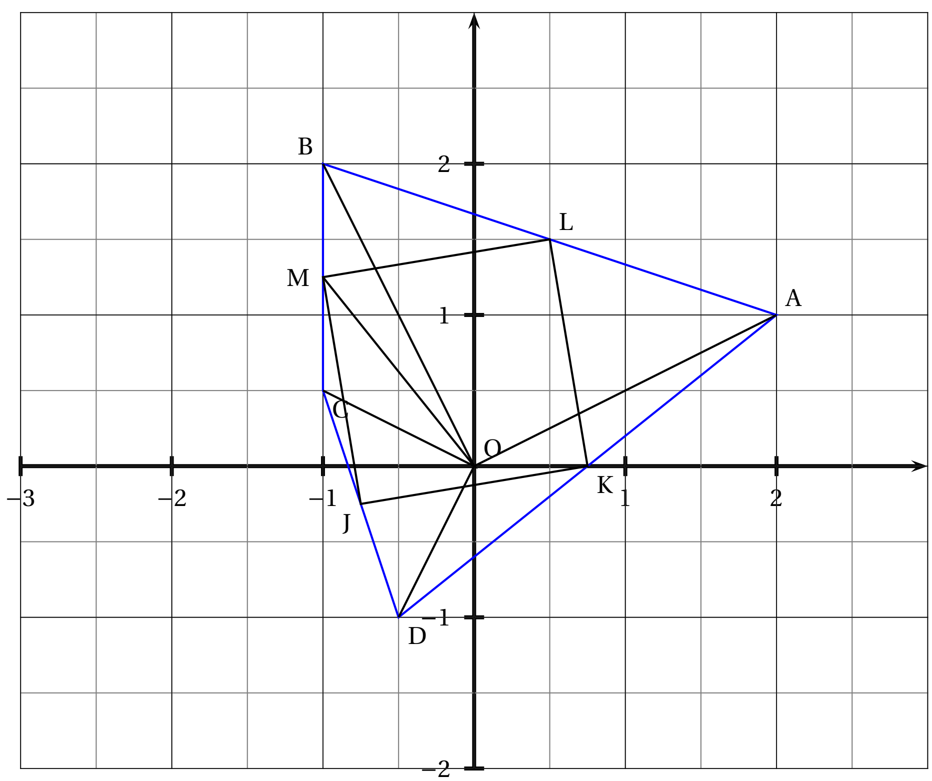
   Développons $(z-\alpha)(z-\mathrm{i}\alpha) = z^2-\mathrm{i}\alpha z-\alpha z+\mathrm{i}\alpha^2 = z^2-\alpha z(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}\alpha^2 = z^2-(1+3\mathrm{i})z-4+3\mathrm{i}$.

   Les solutions de l'équation $f(z)=0$ sont donc $\alpha = 2+\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\alpha = -1+2\mathrm{i}$.

Partie B

1. $b = -1+2\mathrm{i} = \mathrm{i}^2+2\mathrm{i} = \mathrm{i}(\mathrm{i}+2) = \mathrm{i}\alpha$. $a = \alpha$ est l'affixe de A et b celle de B. L'égalité $a = \mathrm{i}b$ donne en module OA = OB et en argument $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$: le triangle OAB est donc rectangle isocèle en O.

2. Sans conjecture : le point D est l'image de C dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On a donc $d = \mathrm{i}c = \mathrm{i}\left(-1+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}$.



On conjecture l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante. D$(-0,5\ ;\ -1)$

3. L'affixe de M est $-1+\dfrac{5}{4}\text{i}$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{DA}}$ est $\dfrac{5}{2}+2\text{i}$.

On a donc $\dfrac{z_{\overrightarrow{\text{OM}}}}{z_{\overrightarrow{\text{DA}}}} = \dfrac{-1+\dfrac{5}{4}\text{i}}{\dfrac{5}{2}+2\text{i}} = \dfrac{-4+5\text{i}}{10+8\text{i}} = \dfrac{\text{i}(4\text{i}+5)}{2(4\text{i}+5)} = \dfrac{1}{2}\text{i}$.

4. L'égalité précedente entraîne que $\left(\overrightarrow{\text{DA}}\,,\,\overrightarrow{\text{OM}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

5. En prenant les modules des membres de l'égalité trouvée au 3. on obtient $\dfrac{\text{OM}}{\text{DA}} = \dfrac{1}{2} \iff \text{OM} = \dfrac{1}{2}\text{DA}$.

6. On admet que le quadrilatère JKLM est un parallélogramme. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont $\left(-3\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$, celles du vecteur $\overrightarrow{\text{BD}}$ $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-3\right)$. On a $\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{BD}} = 0$.

Or dans (ABC), (LM) est parallèle à (AC) (droite des milieux) et dans (ABD) (LK) est parallèle à (BD).

Conclusion : (LM) est perpendiculaire à (LK). Le parallélogramme (JKLM) ayant un angle droit est un rectangle. D'autre part $\text{AC} = \sqrt{\frac{1}{4}+9} = \dfrac{\sqrt{37}}{4}$ et $\text{BD} = \sqrt{\frac{1}{4}+9} = \dfrac{\sqrt{37}}{4}$.

Donc $\text{LM} = \dfrac{\text{AC}}{2} = \dfrac{\sqrt{37}}{4}$ et $\text{LK} = \dfrac{\sqrt{37}}{4}$.

(JKLM) est un rectangle dont deux côtés consécutifs ont la même longueur : c'est un carré.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $\overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AB}}$ se traduit en termes d'affixes par : $m-a = t(b-a) \iff m = a+t(b-a)$.

De même $\overrightarrow{\text{B}M} = t\overrightarrow{\text{BC}} \iff n = b+t(c-b)$ et

$\overrightarrow{\text{C}P} = t\overrightarrow{\text{CA}} \iff p = c+t(a-c)$.

b. G centre de gravité du triangle ABC signifie que $\overrightarrow{\text{GA}}+\overrightarrow{\text{GB}}+\overrightarrow{\text{GC}} = \overrightarrow{0} \iff a-g+b-g+c-g = 0 \iff 3g = a+b+c$.

Or $m+n+p = a+b+c+t(b-a+c-b+a-c) = a+b+c = 3g'$ avec g' affixe du centre de gravité G$'$ de (MNP). Donc $g = g'$ et ABC et MNP ont le même centre de gravité G.

c. Les images respectives de A, B et C par σ sont M, N et P. Comme la similitude conserve le barycentre, l'image de G par σ est le point G.

2. On considère la rotation r dc centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

a. $\overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AB}} \iff \overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{A}M}+t\overrightarrow{M\text{B}} \iff (1-t)\overrightarrow{M\text{A}}+t\overrightarrow{M\text{B}} = \overrightarrow{0}$ qui signifie que M est le barycentre du système de points $\{\text{A}(1-t)\ ;\ \text{B}(t)\}$.

Par la rotation r l'image de A est B, celle de B est C. La rotation conserve le barycentre, donc : $r(M)$ est barycentre du système $\{(\text{B},\ 1-t);(C,t)\} = N$ d'après la première question.

On admet de même quer $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

b. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{\text{G}M}{\text{GA}}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{\text{GA}}\,,\,\overrightarrow{\text{G}M}\right)$.

On a par définition $\overrightarrow{\text{GA}'} = \dfrac{\text{G}M}{\text{GA}}\overrightarrow{\text{GA}}$ qui se traduit

– en prenant les modules par $\text{GB?} = \dfrac{\text{G}M}{\text{GA}}\times\text{GA} = \text{G}M$;

– en prenant les arguments par $\left(\overrightarrow{\text{GA}}\,,\,\overrightarrow{\text{GA}'}\right) = \left(\overrightarrow{\text{GA}}\,,\,\overrightarrow{\text{G}M}\right)$

Conclusion $\text{A}' = M$.

On démontre de même que $\sigma_1(\text{B}) = N$, $\sigma_1(\text{C}) = P$.

c. Il existe donc une similitude transformant A et B en respectivement M et N. Comme il n'existe qu'une similitude transformant deux points distincts en deux points distincts, la similitude unique transformant A, B et C en M, N et P est la similitude σ.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Question de cours
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie A
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0 : 1]$.

1. On intègre par parties :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x$$

2. L'égalité précédente peut s'écrire :
$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - f(1) = -\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x \iff \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - f(1)(1-0) = -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \iff$
$\displaystyle\int_0^1 \left[f(x) - f(1)\right]\mathrm{d}x = -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$

Partie B

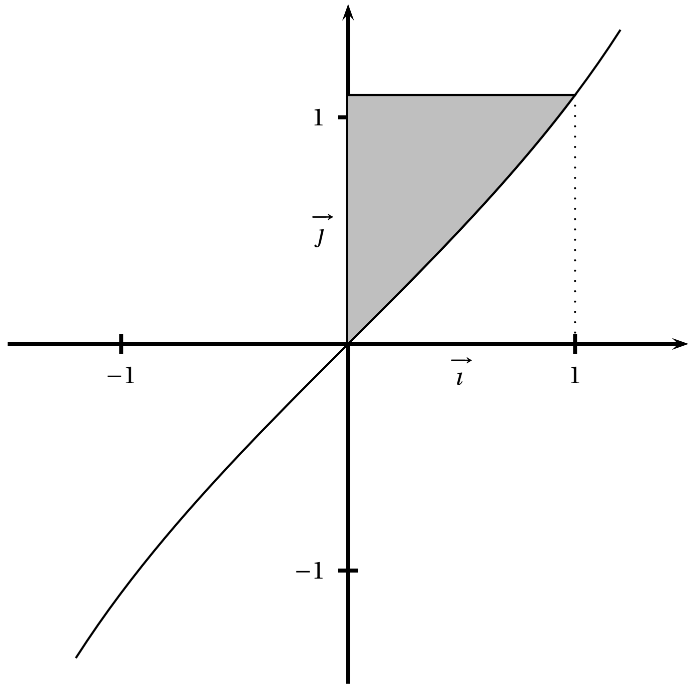
$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$;
$\displaystyle\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$

2. **a.** Par composition de fonctions dérivables, la fonction f est dérivable et : $f'(x) = \dfrac{u}{u'}$, avec $u(x) = \dfrac{2+x}{2-x}$; $f'(x) = \dfrac{\dfrac{4}{(2-x)^2}}{\dfrac{2+x}{2-x}} = \dfrac{4}{(2+x)(2-x)} = \dfrac{4}{4-x^2}$.

b. Sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$, $x^2 < 4$, donc $4 - x^2 > 0$. La dérivée est positive, donc la fonction est croissante de $-\infty$ à $+\infty$, avec $f(0) = 0$.

Partie C
$\text{Aire}(\mathscr{P}) = f(1)\times 1 - \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln 3 + \int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x - \ln 3$ (en utilisant A. 1.)$= \displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.
En posant $u(x) = 4 - x^2$, $u'(x) = ?2x$. On a donc $\dfrac{4x}{4-x^2} = -2\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
On a donc $\text{Aire}(\mathscr{P}) = -2\left|\ln\left(4-x^2\right)\right|_0^1 = -2(\ln 3 - \ln 4) = 2(\ln 4 - \ln 3) = \ln\left(\dfrac{16}{9}\right)$.
Comme l'unité d'aire est égale à 2×2 cm^2, on a $\text{Aire}(\mathscr{P}) = 4\ln\left(\dfrac{16}{9}\right) \approx 2{,}3$ cm^2 ce qui correspond sensiblement au dessin.



EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit $v = (v_n)_{n \geqslant 0}$ une suite.

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \text{e}^{-v_n} + 1$.

Partie A

1. $v_0 = \ln a$, alors : $u_0 = \text{e}^{-\ln a} + 1 = \dfrac{1}{\text{e}^{\ln a}} + 1 = \dfrac{1}{a} + 1$. Réponse a
2. Si v est strictement croissante, alors : $-v$ est décroissante, e^{-v} est décroissante (car la fonction exponentielle est croissante) et $\text{e}^{-v} + 1$ l'est aussi et est minorée par 1 (au voisinage de $+\infty$. Réponse d.
3. Si v diverge vers $+\infty$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \text{e}^{-v_n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$. Réponse c.
4. Si v est majorée par 2, alors : $v_n \leqslant 2 \iff -2 \leqslant -v_n \iff \text{e}^{-2} \leqslant \text{e}^{-v_n} \iff \text{e}^{-2} + 1 \leqslant \text{e}^{-v_n} + 1$. Donc réponse b.

Partie B (1 point)

Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a $\ln(u_n) + v_n > 0$.

On a $u_n = \dfrac{1}{\text{e}^{v_n}} + 1 = \dfrac{1 + \text{e}^{v_n}}{\text{e}^{v_n}} > 0$.

Donc $\ln(u_n) = \ln(1 + \text{e}^{v_n}) - \ln(\text{e}^{v_n}) = \ln(1 + \text{e}^{v_n}) - v_n \iff \ln(u_n) + v_n = \ln(1 + \text{e}^{v_n})$. Or $\text{e}^{v_n} > 0$, donc $\ln(1 + \text{e}^{v_n}) > \ln 1 = 0$.

Autre méthode : quel que soit n, $1 + \text{e}^{v_n} > \text{e}^{v_n}$.

Par croissance de la fonction ln, on a $\ln(u_n) = \ln(1 + \text{e}^{-v_n}) > \ln(\text{e}^{-v_n}) = -v_n$; conclusion $\ln(u_n) + v_n > 0$.