Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S La Réunion septembre 2007

EXERCICE 1 **5 points**

1. **Restitution organisée de connaissances**

   P est vraie : il suffit de reprendre la définition du nombre dérivé de la fonction x^n en un point x_0. L'application du dévoppement de $(x_0+h)^n$ par la formule du binôme permet de montrer que $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

   Q est fausse : on a ici la dérivée d'une fonction composée et $f'(x) = nu'u^{n-1}$.

2. **a.** Avec $h(x) = g(\cos x)$, $h'(x) = (\cos x)'g'(\cos x) = -\sin x \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \dfrac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}$.

   Comme $x \in]-\pi\,;\,0[$, $\sin x < 0$, donc $\sqrt{\sin^2 x} = -\sin x$.

   Finalement $h'(x) = \dfrac{-\sin x}{-\sin x} = 1$.

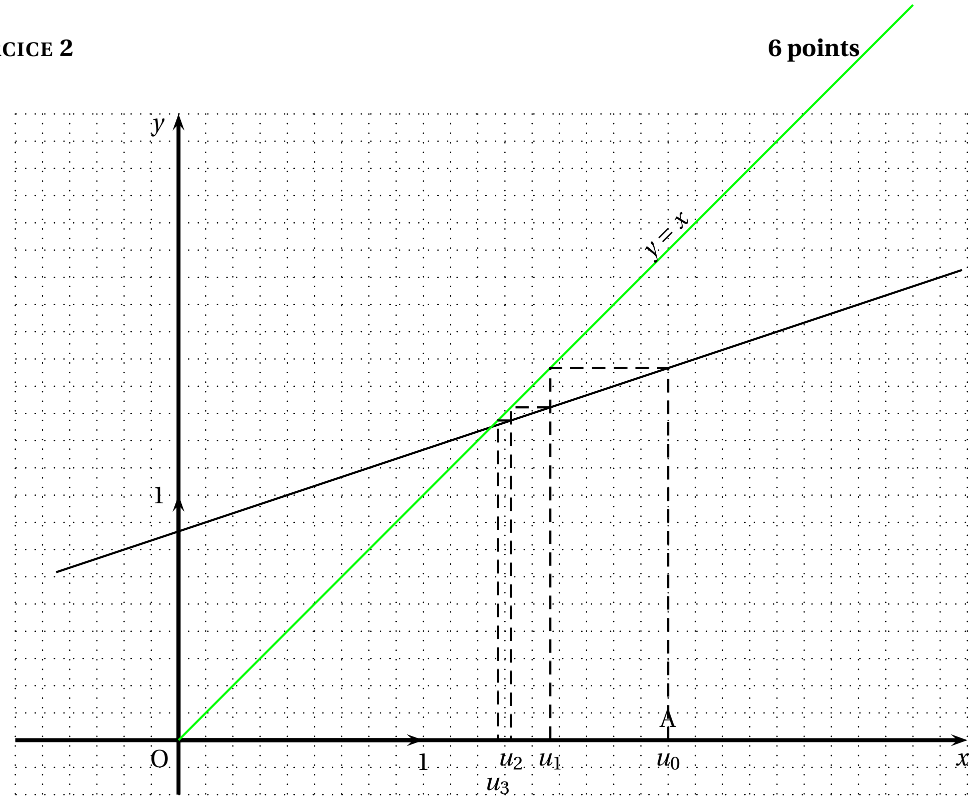
   b. $h'(x) = 1$ implique $h(x) = x+k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

   $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = g\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = g(0) = 0$. Donc $0 = -\dfrac{\pi}{2} + k \iff k = \dfrac{\pi}{2}$.

   Conclusion : sur $]-\pi\,;\,0[$, $h(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 **6 points**

1.



2. Si la suite est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.

   La relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ donne par passage à la limite $\ell = \dfrac{1}{3}\ell + \dfrac{23}{27} \iff \dfrac{2}{3}\ell = \dfrac{23}{27} \iff \ell = \dfrac{23}{18}$.

3. Par récurrence :

- Initialisation : $u_0 = 2 = \dfrac{36}{18} \geqslant \dfrac{23}{18}$.
- Hérédité : supposons que $u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$; alors $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant \dfrac{1}{3} \times \dfrac{23}{18}$ soit $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant \dfrac{23}{54}$. Puis $\dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27} \geqslant \dfrac{23}{54} + \dfrac{23}{27} \iff u_{n+1} \geqslant \dfrac{3 \times 23}{3 \times 18} \iff u_{n+1} \geqslant \dfrac{23}{18}$.

  On a donc bien démontré que pour tout naturel $n,\ u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$.

4. Monotonie :