

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2007 ⌘

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

- Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :
a. 3 b. i c. $3 + i$
- Soit z un nombre complexe ; $|z + i|$ est égal à :
a. $|z| + 1$ b. $|z - 1|$ c. $|i\bar{z} + 1|$
- Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Un argument de $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :
a. $-\frac{\pi}{3} + \theta$ b. $\frac{2\pi}{3} + \theta$ c. $\frac{2\pi}{3} - \theta$
- Soit n un entier naturel. Le complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :
a. $n = 3$ b. $n = 6k + 3$, avec k relatif
latif c. $n = 6k$ avec k relatif
- Soient A et B deux points d'affixe respective i et -1 . l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est :
a. la droite (AB) b. le cercle de diamètre
[AB] c. la droite perpendi-
culaire à (AB) passant
par O
- Soit Ω le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :
a. $y = -x + 1$ b. $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ c. $z = 1 - i + 5e^{i\theta}$ avec θ
réel
- Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ est :
a. $1 - 4i$ b. $-3i$ c. $7 + 4i$
- L'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $\frac{z-2}{z-1} = z$ est :
a. $\{1 - i\}$ b. L'ensemble vide c. $\{1 - i ; 1 + i\}$

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

- D l'évènement « le composant est défectueux » ;
- F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;

– F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1.
 - a. Dessiner un arbre pondéré.
 - b. Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0,0225$.
 - c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près.

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?
3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ , avec λ réel strictement positif.
 - a. Sachant que $p(X > 5) = 0,325$, déterminer λ .
Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.
 - b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?
 - c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

EXERCICE 3

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A : question de cours

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a; +\infty[$. Compléter la phrase suivante :
« On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si ... »
2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient f , g et h trois fonctions définies sur $[a; +\infty[$ et ℓ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ .

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x - x - 1$$

et soit (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (\mathcal{C}) . On a représenté sur la feuille annexe la courbe (\mathcal{C}) et la droite (D) .

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a , une équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point M d'abscisse a .
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b . Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point M d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.

Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de f .
2. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} \quad (2) \quad e^{\frac{-1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

5. Dédurre des questions précédentes un encadrement de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

puis sa limite en $+\infty$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1.
 - a. Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
 - b. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontrera de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.
 - c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).
 - a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
 - b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).
 - c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right)$.
3.
 - a. Calculer la distance du point O au plan (ABC).
 - b. Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.
 - c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.
 - a. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
 - b. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
 - c. En déduire que $6^{40} \equiv 1 [11]$ et que $6^{40} \equiv 1 [5]$.
 - d. Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.
 - a. Montrer que l'équation

$$(E) \quad 65x - 40y = 1$$

n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation

$$(E') \quad 17x - 40y = 1$$

admet au moins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E') .

d. Résoudre l'équation (E') .

En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1 \pmod{40}$.

3. Pour tout entier naturel a , démontrer que si $a^{17} \equiv b \pmod{55}$ et si $a^{40} \equiv 1 \pmod{55}$, alors $b^{33} \equiv a \pmod{55}$.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

