

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2008 ☞
(spécialité)

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 6[$ par

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit pour tout entier naturel n la suite (U_n) par

$$\begin{cases} U_0 & = -3 \\ U_{n+1} & = f(U_n) \end{cases}$$

- La courbe représentative de la fonction f est donnée sur la feuille jointe accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur cette feuille annexe les points $M_0(U_0; 0)$, $M_1(U_1; 0)$, $M_2(U_2; 0)$, $M_3(U_3; 0)$ et $M_4(U_4; 0)$. Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?
- Démontrer que si $x < 3$ a alors $\frac{9}{6-x} < 3$.
En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n .
 - Étudier le sens de variation de la suite (U_n) .
 - Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?
- On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n .
 - Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
 - Déterminer V_n puis U_n en fonction de n .
 - Calculer la limite de la suite (U_n) .

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

PARTIE B

On note $0, 1, 2, \dots, 9, \alpha, \beta$, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1711 \text{ en base 10}$$

- Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$

Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :

$$N_2 = 1\,131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. a. Démontrer que $N \equiv a_0 \pmod{3}$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
- b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.
3. a. Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{11}$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.
- b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.
4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.
 - a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.
 - b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.
 - c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?
2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit pas. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

EXERCICE 4

5 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit t un nombre réel. On donne le point $A(-1 ; 2 ; 3)$ et la droite \mathcal{D} de système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite \mathcal{D} .

1.
 - a. Donner une équation cartésienne du plan \mathcal{P} , perpendiculaire à la droite \mathcal{D} et passant par A .
 - b. Vérifier que le point $B(-3 ; 3 ; -4)$ appartient à la droite \mathcal{D} .
 - c. Calculer la distance d_B entre le point B et le plan \mathcal{P} .
 - d. Exprimer la distance d en fonction de d_B et de la distance AB . En déduire la valeur exacte de d .
2. Soit M un point de la droite \mathcal{D} . Exprimer AM^2 en fonction de t . Retrouver alors la valeur de d .

ANNEXE (à rendre avec la copie)

