

∞ Baccalauréat S Polynésie septembre 2007 ∞

EXERCICE 1

7 points

Commun à tous les candidats

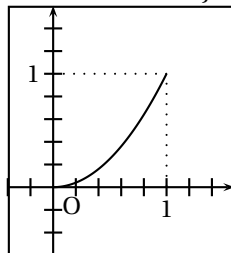
On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $[0;1]$ et vérifiant les conditions (P₁), (P₂) et (P₃) suivantes :

- (P₁) : f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$.
- (P₂) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
- (P₃) : pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $f(x) \leq x$.

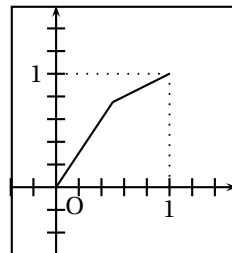
Dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, on note (\mathcal{C}_f) la courbe représentative d'une fonction f de l'ensemble (E) et (D) la droite d'équation $y = x$.

À toute fonction f de (E), on associe le nombre réel $I_f = \int_0^1 [x - f(x)] dx$.

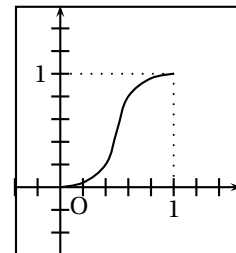
1. a. Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E). La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.



Courbe n° 1



Courbe n° 2



Courbe n° 3

- b. Montrer que, pour toute fonction f de (E), $I_f \geq 0$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $h(x) = 2^x - 1$. (On rappelle que, pour tout x réel, $2^x = e^{x \ln 2}$).

- a. Montrer que la fonction h vérifie les conditions (P₁) et (P₂).

- b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $\varphi(x) = 2^x - x - 1$.

Montrer que, pour tout x de $[0; 1]$, $\varphi(x) \leq 0$. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction φ sur $[0; 1]$).

En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).

- c. Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.

3. Soit P une fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels tels que $0 < a < 1$. On se propose de déterminer les valeurs des réels a, b et c pour que la fonction P appartienne à l'ensemble (E) et que $I_P = I_h$.

- a. Montrer que la fonction P vérifie la propriété (P₂) si et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$.

Montrer que toute fonction P définie sur $[0; 1]$ par $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$ avec $0 < a < 1$ appartient à (E).

- b. Exprimer en fonction de a le réel I_P associé à la fonction P .

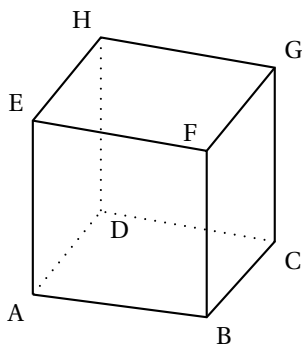
- c. Montrer qu'il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$. Quelle est cette valeur ?

EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormal $(D; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

1.
 - a. Donner les coordonnées des points A, C et E.
 - b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C; 2), (E; 1)\}$.
 - c. Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{DL} .
2. Soit (a, b) un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DL}$.
 - a. Montrer que le vecteur \overrightarrow{MN} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{DL} si et seulement si le couple (a, b) vérifie le système
$$\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$$
 - b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).
 - c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0 .

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :

40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.

La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.

Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'évènement « la plante choisie la n -ième année est de type A »,
- B_n l'évènement « la plante choisie la n -ième année est de type B »,
- C_n l'évènement « la plante choisie la n -ième année est de type C ».

On désigne par p_n , q_n et r_n les probabilités respectives des évènements A_n , B_n et C_n .

Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année $n^{\circ}0$) on pose : $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

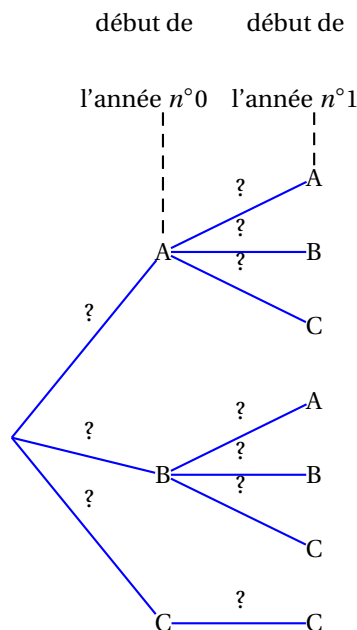
1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.

2. a. Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1 .
 b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur \mathbb{N} par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.

- a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.
- b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n) .
- c. En déduire les limites des suites (p_n) , (q_n) et (r_n) . Interpréter le résultat.



EXERCICE 4

5 points

Commun à tous les candidats

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies sur la feuille jointe en annexe. Cette feuille ne sera pas remise avec la copie.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport λ et d'angle θ . Soit :

- les points A' et B' , images respectives des points A et B par la similitude σ ;
- les points I, milieu du segment $[A' B]$ et J, milieu du segment $[A B']$;
- le point M milieu du segment $[AA']$;
- le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AR) et le point H' image du point H par la similitude σ .

Partie A. Étude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6 + 4i$, le point B a pour affixe $2 + 4i$, et le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), a donc pour affixe $4i$.

La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1. Déterminer les affixes des points A' , B' et H' .
- 2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH').

Partie B. Étude du cas général

- 1. a. Montrer que H' est le projeté orthogonal du point O sur la droite $(A' B')$.
 b. Montrer que $\vec{MI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. On admet que $\vec{MJ} = \frac{1}{2}\vec{A'B'}$.
- c. En déduire que $\frac{MJ}{MI} = \frac{OH'}{OH}$ et que $(\vec{MI}, \vec{MJ}) = (\vec{OH}, \vec{OH'}) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. On appelle s la similitude directe qui transforme M en O et I en H .

On note K l'image du point J par la similitude s .

a. Montrer que $OK = OH'$, puis que $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OH'}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b. En déduire que le point H' est l'image du point J par la similitude s .

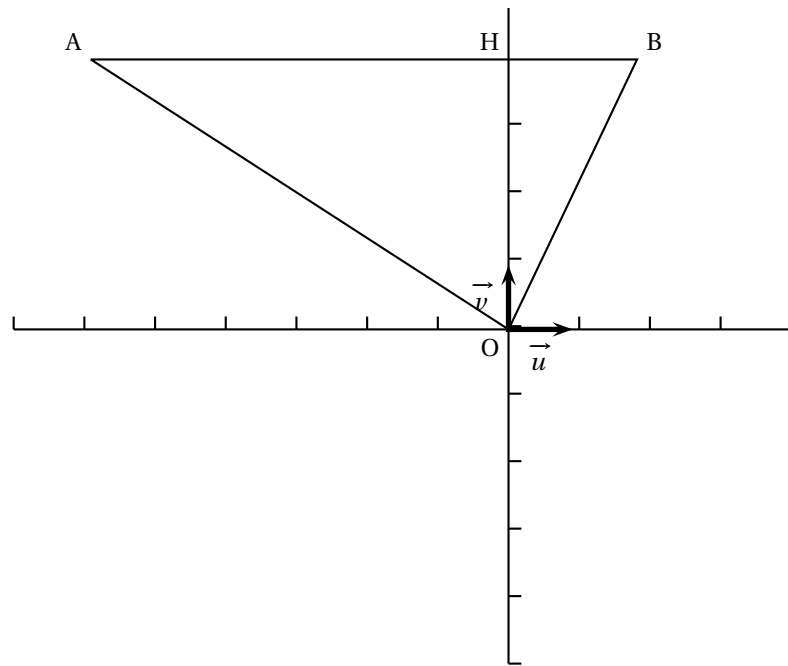
3. Montrer que $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'}) = (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH}) + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH') .

ANNEXE

Cette page ne sera pas remise avec la copie

Partie A



Partie B

