

Calcul de la durée de parcours des rayons lumineux sur le trajet Soleil-Terre

C'est un calcul classique en RG. "l'effet Shapiro" n'a pas été découvert par Shapiro mais c'est lui qui, le premier, l'a mis à profit pour mesurer les effets du champ de gravitation sur le mouvement de la lumière et soumettre, à l'épreuve de l'expérience, les prévisions de la RG.

1) Métrique de l'espace-temps dans le champ du Soleil. Compte tenu de la symétrie sphérique du problème, on peut adopter la métrique déterminée par Schwartzchild, soit :

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

τ est le temps propre (du référentiel, pas du photon !!) θ et ϕ sont les angles polaires habituels (en raison de la symétrie sphérique du problème, ils ne sont pas affectés par la courbure de l'espace-temps), mais, en revanche, la coordonnée r n'est pas directement la distance radiale : celle-ci est donnée, pour deux points r_1 et r_2 , par :

$$d(r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{A(r)} dr$$

On obtient, en résolvant les équations du champ d'Einstein, réduite ici, à deux équations différentielles ordinaires en raison de la symétrie :

$$B(r) = \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) c^2$$

$$A(r) = \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1}$$

c est la vitesse de la lumière ; G , la constante de Cavendish : $G = 6,6732 \cdot 10^{-11}$ MKmSA ; M , la masse du soleil : $M = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg.

2) Équation du mouvement orbital.

C'est l'équation des géodésiques correspondant à la métrique utilisée. La forme tensorielle générale s'écrit :

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0$$

σ est un paramètre qui varie uniformément le long de la trajectoire. $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ désigne les composantes de la connexion affine, réduites, ici, aux symboles de Christoffel : $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \{\mu\nu^\lambda\}$.

Rappelons que :

$$\{\mu\nu^\lambda\} = g^{\lambda\rho} [\mu\nu, \rho] = g^{\lambda\rho} \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \text{ avec : } \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Les indices répétés en haut et en bas sous entendent une sommation sur toutes les valeurs : t, r, θ, ϕ . En outre, $g^{\lambda\mu}$ est égale à la matrice inverse de $g_{\lambda\mu}$.

Il faut, calculer les composantes non nulles de la connexion affine, correspondant aux valeurs des composantes du tenseur métrique, $g_{\lambda\mu}$, figurant dans la métrique de Schwartzchild. Ce sont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} r \\ tr \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2A(r)} \frac{dA(r)}{dr} & \left\{ \begin{matrix} r \\ \theta\theta \end{matrix} \right\} &= -\frac{r}{A(r)} \\ \left\{ \begin{matrix} r \\ \phi\phi \end{matrix} \right\} &= -\frac{r \sin^2 \theta}{A(r)} & \left\{ \begin{matrix} r \\ tt \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2A(r)} \frac{dB(r)}{dr} \\ \left\{ \begin{matrix} \theta \\ r\theta \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \theta r \end{matrix} \right\} & &= \frac{1}{r} \\ \left\{ \begin{matrix} \phi \\ r\phi \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} \phi \\ \phi r \end{matrix} \right\} & &= \frac{1}{r} & \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \phi\theta \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} \phi \\ \theta\phi \end{matrix} \right\} = \cotg\theta \\ \left\{ \begin{matrix} t \\ tr \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} t \\ rt \end{matrix} \right\} & &= \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \end{aligned}$$

En substituant ceux des symboles de Christoffel non nuls, dans l'équation du mouvement, ci-dessus, tous calculs faits et réarrangeant les termes, puis explicitant les équations correspondant aux 4 valeurs de l'indice libre λ , il vient :

$$\begin{aligned}\lambda = r &\rightarrow \frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 - \frac{r}{A(r)} \left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 - \frac{r \sin^2\theta}{A(r)} \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 + \frac{B'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 = 0 \\ \lambda = \theta &\rightarrow \frac{d^2\theta}{d\sigma^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\sigma} \frac{dr}{d\sigma} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = 0 \\ \lambda = \varphi &\rightarrow \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\sigma} \frac{dr}{d\sigma} + 2 \cot\theta \frac{d\theta}{d\sigma} \frac{d\varphi}{d\sigma} = 0 \\ \lambda = t &\rightarrow \frac{d^2t}{d\sigma^2} + \frac{B'(r)}{B(r)} \frac{dt}{d\sigma} \frac{dr}{d\sigma} = 0\end{aligned}$$

Le prime (') désigne une dérivation par rapport à r. Certaines caractéristiques géométriques ou dynamiques du système permettent de le simplifier :

- en raison de la symétrie sphérique, l'orbite est confinée dans le plan équatorial, d'où : $\theta = \pi/2$. ce qui nous débarrasse de la deuxième équation.

- en divisant la 3^{ème} et la 4^{ème}, respectivement, par $d\varphi/d\sigma$ et $dt/d\sigma$, on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\sigma} \left[\text{Ln}\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right) + \text{Ln}(r^2) \right] &= 0 \\ \frac{d}{d\sigma} \left[\text{Ln}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right) + \text{Ln}(B(r)) \right] &= 0\end{aligned}$$

Ceci définit deux constantes du mouvement, dont l'une peut être fixée en redéfinissant le paramètre σ de telle sorte que :

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{c^2}{B(r)}$$

(ce qui rend σ très voisin de t puisque $B(r)$ est très voisin de 1)

L'autre constante s'obtient, à partir de la première équation, 6 lignes plus haut, en posant :

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\sigma} = J \quad (\text{constante})$$

J a la dimension d'un moment angulaire par unité de masse. En substituant dans la première équation des géodésiques (en haut de la page), compte tenu de $d\theta/d\sigma = 0$ et $\sin^2\theta = 1$, on obtient :

$$\frac{d^2r}{d\sigma^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 - \frac{J^2}{r^3 A(r)} + \frac{c^4 B'(r)}{2A(r) B^2(r)} = 0$$

En multipliant par $2A(r)(dr/d\sigma)$, ceci peut s'écrire :

$$\frac{d}{d\sigma} \left[A(r) \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{c^4}{B(r)} \right] = 0$$

D'où l'on tire :

$$A(r) \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{c^4}{B(r)} = -h \quad \text{constante}$$

Et, par suite :

$$\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2 = h$$

h doit être supérieur ou égal à 0. Pour la lumière, $h=0$. On peut, alors, éliminer le paramètre σ au moyen de :

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{c^2}{B(r)} \quad \text{et} : r^2 \frac{d\varphi}{d\sigma} = J \quad \text{d'où} : \frac{d\varphi}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{JB(r)}{c^2} \rightarrow r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{JB(r)}{c^2} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{c^2}{B(r)}$$

dr/dt doit s'annuler pour $r = r_0$ point le plus proche du Soleil, de sorte que :

$$J^2 = \frac{r_0^2}{B(r_0)}$$

Le mouvement des photons est donc régi par :

$$\frac{A(r)}{B^2(r)} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 B^{-1}(r_0) - B^{-1}(r) = 0$$

Le temps, que met un photon, pour aller de r_0 en r , vaut donc :

$$t(r_0, r) = \int_{r_0}^r \left[\frac{A(r)B(r)}{1 - \frac{B(r)}{B(r_0)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} dr$$

Pour calculer cette intégrale, compte tenu de ce que $2MG/c^2r$ est petit, on développe A et B en limitant au premier ordre, soit :

$$A(r) \approx 1 + \frac{2MG}{c^2r} \quad B(r) \approx 1 - \frac{2MG}{c^2r}$$

D'où :

$$1 - \frac{B(r)}{B(r_0)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \approx 1 - \left[1 + \frac{2MG}{c^2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \right] \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \approx \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left[1 - \frac{2MG r_0}{c^2 r(r+r_0)} \right]$$

De sorte, qu'au premier ordre, on a :

$$t(r_0, r) = \int_{r_0}^r \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{2MG}{c^2r} + \frac{2MG}{c^2r(r+r_0)} \right] dr$$

On trouve :

$$t(r_0, r) \approx \sqrt{r^2 - r_0^2} + 2 \frac{MG}{c^2} \ln\left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}\right) + \frac{MG}{c^2} \left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dans le cas de Mercure et la Terre, l'excès de temps (au-delà du premier terme qui correspond à l'absence de distorsion), est de 240 μ sec, soit : 72 km à la vitesse de la lumière.

3) Parcours bord solaire-Terre

Dans ce cas, on suppose que le faisceau est radial, de sorte que le moment orbital est nul : il faut donc annuler J (voir ci-dessus, au milieu du paragraphe 2). Les formules se simplifient, alors, et on a, pour le temps d'aller Soleil-Terre :

$$t(r_0, r) = c \int_{r_0}^r \frac{r}{c^2 r - 2GM} dr$$

On fait le changement de variables :

$$r = \frac{\rho + 2MG}{c^2} \rightarrow \rho = c^2 r - 2MG \rightarrow dr = \frac{d\rho}{c^2} \rightarrow t = c \int \frac{\rho + 2MG}{c^2 \rho} \frac{d\rho}{c^2} = c \int \left(\frac{1}{c^4} + \frac{2MG}{c^4 \rho} \right) d\rho = \frac{\rho}{c^3} + \frac{2MG}{c^3} \ln(\rho)$$

Soit :

$$t(r_0, r) = \frac{r - r_0}{c} + \frac{2MG}{c^3} \ln\left(\frac{c^2 r - 2MG}{c^2 r_0 - 2MG}\right)$$

C'est le second terme qui représente le retard subi par la lumière lors du retour. Il contient le facteur : $2MG/c^3$.

J'ai mis le facteur 2 en rouge. Sur l'aller retour, ça ne change rien car le signal est retardé dans un sens et avancé dans l'autre (sans que la vitesse de la lumière n'ait changé en quoi que ce soit !!!!). C'est la raison, pour laquelle, on a choisi, dans l'expérience Shapiro, de viser Mercure presque en opposition pour que le signal rase le bord du Soleil au plus près. Il faut dire, qu'à cette époque, on ne disposait pas de sondes en orbite de manière à utiliser directement le signal sur un trajet Soleil-Terre simple. Je crois que cela a été fait depuis, confirmant, bien sûr, les prévisions de la Relativité Générale.