Une approche de l'accélération en Relativité restreinte

Benoit De Coninck

9 novembre 2004

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Résolution en Mécanique classique **2**
2.1 Recherche des équations 2
2.2 Exemple numérique 3
2.3 Constatations 4

3 Résolution en relativité restreinte **4**
3.1 Recherche des équations 4
3.1.1 L'accélération 4
3.1.2 La vitesse 5
3.1.3 La durée vue de l'extérieur 6
3.1.4 Le facteur K 7
3.1.5 La durée dans le vaisseau 8
3.1.6 Vitesse et facteur K en fonction de x 9
3.2 Exemple numérique 10
3.3 Constatations 11

4 Relation entre les équations relativiste et classique **12**
4.1 Entre le temps classique et le temps extérieur 12
4.2 Entre le temps classique et le temps intérieur 13
4.3 Exemple Numérique 14

5 Avec une vitesse initiale non nulle **14**
5.1 Recherche des équations 14
5.2 Exemple numérique 15

1 Introduction

"Bienvenu à bord du vol MC3-45 vers proxima du centaure. Pour parcourir la distance de 4 années-lumières qui nous séparent de notre destination, nous subirons une accélération constante de 1,5g (soit$15 m/sec^2$) pendant l'année que durera le voyage. Nous espérons que le voyage vous sera agréable..."

Mais au fait, dans le futur sera-t-il possible pour le commun des mortel de réaliser des voyages inter-cidéraux ? Soit pour une collonisation de planètes lointaines ou plus simplement pour passer des vacances exotiques. Et si oui, quelle est la durée d'un vol accéléré sur une longue distance ?

Pour poser ce problème plus mathématiquement, quelle durée un vaisseau de masse m_0 subissant une poussée F mettre-il pour parcourir une distance x ?
Les données du problèmes sont donc :
- x la distance à parcourir en m ;
- m_0 la masse de départ du vaisseau en kg ;
- F la poussé servant à la propulsion en N.

La réponse attendue est la durée du voyage. Dans la suite de ce document, cette détermination sera réalisée premièrement en ne tenant compte que de la mécanique classique, puis, les effets de la relativité restreinte seront pris en compte.

D'un point de vue pratique, nous établirons premièrement les équations théoriques avant de nous lancer dans le calcul de la durée du voyage proposé par le vol MC3-45. Cet exemple nous premettra d'autres considérations plus générales

2 Résolution en Mécanique classique

2.1 Recherche des équations

L'équation fondamentale de la mécanique classique $F = m_0\, a$ nous permet de calculer l'accélération que subit le vaisseau :

$$a = \frac{F}{m_0} \tag{1}$$

Le calcul de la vitesse au temps t est donné en intégrant l'accélération par rapport au temps :

$$v = \int a \,\mathrm{d}t = a\,t + v_0 = a\,t \tag{2}$$

en posant une vitesse initiale v_0 nulle.

De même, le calcul de la distance parcourue pendant le temps t est obtenu en intégrant la vitesse par rapport au temps :

$$x = \int v \,\mathrm{d}t = \int a\,t \,\mathrm{d}t = \frac{a\,t^2}{2} + x_0 = \frac{a\,t^2}{2} \tag{3}$$

en posant une distance initiale x_0 nulle.

L'équation (3) permet de mettre le temps "t" en évidence :

$$x = \frac{a\,t^2}{2} \Rightarrow t^2 = \frac{2\,x}{a} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\,x}{a}} \tag{4}$$

$$(4) \text{ et } (1) \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\,m_0\,x}{F}} \tag{5}$$

Qui nous permet de déterminer la durée du parcours en utilisant les données initiales.

On peut également en déduite la vitesse après avoir parcouru la distance x :

$$v = a\,t = \frac{F}{m_0}\sqrt{\frac{2\,m_0\,x}{F}} = \sqrt{\frac{2\,F\,x}{m_0}} \tag{6}$$

Le problèmes est alors entièrement résolu en mécanique classique.

2.2 Exemple numérique

On va reprendre l'annonce faite dans l'introduction pour la soumettre aux équations trouvées. En considérant une vitesse relative nulle entre le point de départ et le point d'arrivée, le voyage total de 4 années lumière (A.L. $\approx 9,5\,10^{15}$ m) sera parcouru moitier en accélération et moitier en décélération. La distance x prise en compte dans les équations sera donc de 2 A.L.

Ne voulant pas nous risquer à estimer qu'elle sera la masse totale d'un futur vaisseau de l'espace, nous allons nous baser sur l'accélération annoncée ($15m/sec^2$) pour poser :

$$a = 15 = \frac{F}{m_0} = \frac{15}{1}$$

En utilisant l'équation (5), la durée d'un demi-voyage est :

$$t = \sqrt{\frac{2\,m_0\,x}{F}} = \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 19\,10^{15}}{15}} = 50.332.230 \text{ sec} = 582,5 \text{ jours}$$

La durée totale du voyage est donc de $582,5 \times 2 = 1165$ jours, soit $3,19$ ans.

La vitesse maximale est atteinte au milieu du voyage et vaut :

$$v = \sqrt{\frac{2\,F\,x}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 15 \times 19\,10^{15}}{1}} = 7,55\,10^8 \text{ m/sec}$$

2.3 Constatations

Sur base de notre exemple numérique, la mécanique classique nous permet de déterminer que la durée du voyage accéléré ($1,5$g) puis décéléré à destination de la plus proche étoile (4 A.L.) est de $3,19$ ans. Pour couvrir la même distance, la lumière met 4 ans. En installant un téléscope sur place, nous pourrions donc assister de loin aux semaines qui précèdent notre départ, ou regarder une émission de TV que nous aurions manquée !!!

La vitesse maximum atteinte est de $7,55\,10^8$ m/sec, soit plus du double de la vitesse de la lumière ($3\,10^8$ m/sec). Un des enseignements de la relativité restreinte est que la vitesse de la lumière dans le vide est la vitesse la plus grande possible d'un mobile où d'un signal queconque.

Nous constatons donc que pour des déplacements de l'ordre de l'année lumière avec une accélération de l'odre de grandeur de g, la détermination de la durée du voyage n'est pas dans le domaine de validité de la mécanique classique. Nous devons donc reprendre le problème dans le cadre de la relativité restreinte.

3 Résolution en relativité restreinte

3.1 Recherche des équations

3.1.1 L'accélération

En relativité restreinte, l'équation fondamentale de la mécanique classique $F = m_0\,a$ n'est plus applicable comme telle. La masse d'un objet vue de l'extérieure (et dans ce cas depuis le point de départ du vaisseau) dépend de sa vitesse (par rapport au point de départ) suivant l'équation :

$$m = K\, m_0 \text{ avec } K = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{7}$$

où c est la vitesse de la lumière ($\pm 3\,10^8$ m/sec).

En tenant compte de (7), l'équation fondamentale de la mécanique devient donc :

$$F = K\, m_0\, a = \frac{m_0\, a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Longrightarrow a = \frac{F\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_0} \tag{8}$$

Cette formule implique que plus la vitesse est importante, plus la valeur de l'accélération vue de l'extérieur est faible pour une force de propulsion constante. L'accélération perçue dans le vaisseau reste constante, puisque la force de poussée est constante et que la variation de masse n'est valable que pour le système de référence de départ. Cette unique modification de l'équation de base va nous permettre de continuer notre développement suivant le même schéma que pour la mécanique classique.

3.1.2 La vitesse

Le calcul de la vitesse est donné en intégrant l'accélération par rapport au temps :

$$v = \int a\,\mathrm{d}t = \int \frac{F\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_0}\,\mathrm{d}t = \frac{F\,t}{m_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

en posant une vitesse initiale v_0 nulle. Mettons à présent v en évidence :

$$v^2 = \frac{F^2t^2}{m_0^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow v^2\left(1+\frac{F^2t^2}{m_0^2c^2}\right) = \frac{F^2t^2}{m_0^2}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{F^2t^2}{m_0^2\left(1+\frac{F^2t^2}{m_0^2c^2}\right)}$$

$$\Rightarrow v = \frac{F\,t}{m_0\sqrt{1+\frac{F^2t^2}{m_0^2c^2}}} \tag{9}$$

L'équation (9) montre la vitesse finale comme une fraction de la vitesse déterminée par la mécanique classique ($F\,t/m_0 = a\,t$). En poursuivant la mise en évidence, on obtient :

$$(9) \Rightarrow v = \frac{F\,t}{m_0\sqrt{\frac{F^2c^2m_0^2}{F^2c^2m_0^2} + \frac{F^2t^2}{m_0^2c^2}}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{F\,t}{m_0\sqrt{\frac{F^2}{m_0^2c^2}\left(\frac{c^2m_0^2}{F^2} + t^2\right)}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{c\,t}{\sqrt{\frac{c^2m_0^2}{F^2} + t^2}} \tag{10}$$

L'équation (10) montre la vitesse finale comme une fraction de la vitesse de la lumière. Cette vitesse est donc bien une limite supérieure.

3.1.3 La durée vue de l'extérieur

La détermination de la distance parcourue (avec une vitesse initiale nulle) pendant le temps t est obtenue en intégrant la vitesse par rapport au temps :

$$x = \int_0^{te} v\,\mathrm{d}t = \int_0^{te} \frac{c\,t}{\sqrt{\frac{c^2m_0^2}{F^2} + t^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow x = c\left[\ \sqrt{\frac{c^2m_0^2}{F^2} + t^2}\ \right]_0^{te}$$

$$\Rightarrow x = c\left(\sqrt{\frac{c^2m_0^2}{F^2} + t_e^2} - \sqrt{\frac{c^2m_0^2}{F^2}}\right) \tag{11}$$

puis de mettre t en évidence :

$$\Rightarrow \frac{x}{c} = \sqrt{\frac{c^2m_0^2}{F^2} + t_e^2} - \frac{m_0c}{F}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{c} + \frac{m_0c}{F} = \sqrt{\frac{c^2m_0^2}{F^2} + t_e^2}$$

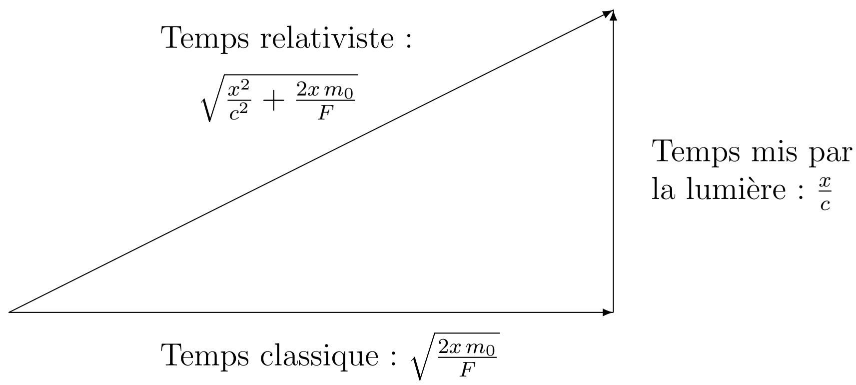
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{c} + \frac{m_0c}{F}\right)^2 = \frac{c^2m_0^2}{F^2} + t_e^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\,m_0}{F} + \frac{c^2m_0^2}{F^2} = \frac{c^2m_0^2}{F^2} + t_e^2$$

$$\Rightarrow t_e^2 = \frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\,m_0}{F}$$

$$\Rightarrow t_e = \sqrt{\frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\,m_0}{F}} \tag{12}$$

On constate dans l'équation (12) que pour un $x \ll c$, on retrouve le résultat de la mécanique classique. On en déduit également que le temps de parcours de la relativité restreinte est la somme quadratique du temps mis suivant la mécanique classique et du temps que met la lumière pour parcourir cette distance. Il en résulte, que pour une accélération infinie, le terme de la mécanique classique devient nul, et que le temps de parcours est identique à celui de la lumière. La dénomination t_e est employée car le temps calculé est celui qui s'écoule pour un observateur resté au point de départ du vaisseau (e pour extérieur au vaisseau).



3.1.4 Le facteur K

Déterminons à présent le paramètre rélativiste K pour la vitesse finale en fonction du temps de parcours. Nous savons que :

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \text{ et suivant (10) : } v^2 = \frac{c^2 t^2}{\frac{c^2 m_0^2}{F^2} + t^2}$$

$$\Rightarrow K = \frac{c}{\sqrt{c^2 - \frac{c^2 t^2}{\frac{c^2 m_0^2}{F^2} + t^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{\frac{c^2 m_0^2}{F^2} + t^2}}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{\frac{\frac{c^2 m_0^2}{F^2}}{\frac{c^2 m_0^2}{F^2}+t^2} + \frac{t^2}{\frac{c^2 m_0^2}{F^2}+t^2} - \frac{t^2}{\frac{c^2 m_0^2}{F^2}+t^2}}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{\frac{\frac{c^2 m_0^2}{F^2}}{\frac{c^2 m_0^2}{F^2}+t^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{c^2 m_0^2}{F^2}+t^2}{\frac{c^2 m_0^2}{F^2}}}$$

$$\Rightarrow K = \sqrt{1 + \frac{t^2 F^2}{c^2 m_0^2}} \tag{13}$$

3.1.5 La durée dans le vaisseau

Nous disposons à présent d'équations relativistes qui donnent le temps de parcours, la vitesse et le facteur K valables pour le système de référence de départ. Pour connaitre les conditions de vie des voyageurs, il nous manque encore le temps écoulé dans le système de référence du vaisseau spacial.

En mouvement rectiligne uniforme, la relativité restreinte indique que si nous avons un temps t_e dans le système de référence (extérieur), nous avons le temps $t_v = t_e/K$ dans le système en mouvement (vaisseau). La valeur de K que nous avons déterminée est la valeur finale qui sur base de notre hypothèse de vitesse initiale nulle est également la valeur maximum de tout le parcours. Nous en déduisons que $t_e/K < t_v < t_e$. Il s'agit donc de trouver un K moyen (K_m) tel que $t_v = t_e/K_m$.

Pour établir cette moyenne, nous allons intégrer par rapport au temps. Comme il s'agit de trouver une moyenne de temps de durée fixe avec chaque fois une vitesse différente, il faut utiliser la moyenne géométrique (on pose que la vitesse reste constante sur l'intervalle de temps dt).

$$\frac{1}{K_m} = \frac{1}{t_e}\int_0^{t_e} \frac{1}{K}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_e}\int_0^{t_e} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2F^2}{c^2m_0^2}}}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{Comme } \sqrt{1 + \frac{t^2 F^2}{c^2 m_0^2}} = \frac{F}{c\,m_0}\sqrt{\frac{c^2 m_0^2}{F^2} + t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{K_m} = \frac{c\,m_0}{F\,t_e} \int_0^{t_e} \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 m_0^2}{F^2} + t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{c\,m_0}{F\,t_e} \left[\ \mathrm{arcsinH}\left(\tfrac{t\,F}{c\,m_0}\right) \ \right]_0^{te}$$

$$\frac{1}{K_m} = \frac{c\,m_0}{F\,t_e} \left[\ \mathrm{arcsinH}\left(\tfrac{t_e F}{c\,m_0}\right) - 0 \ \right]$$

$$\Rightarrow K_m = \frac{F\,t_e}{c\,m_0\,\mathrm{arcsinH}\left(\frac{t_e F}{c\,m_0}\right)} \tag{14}$$

$$\text{L'équation (13)} \Rightarrow K^2 = 1 + \frac{t^2 F^2}{c^2 m_0^2}$$

$$\Rightarrow \frac{t^2 F^2}{c^2 m_0^2} = K^2 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{t_e F}{c\,m_0} = \sqrt{K^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \text{L'équation (14) devient : } K_m = \frac{\sqrt{K^2-1}}{\mathrm{arcsinH}\left(\sqrt{K^2-1}\right)} \tag{15}$$

Par définition, nous savons que $\mathrm{arcsinH}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$:

$$\Rightarrow \mathrm{arcsinH}\left(\sqrt{K^2-1}\right) = \ln\left(\sqrt{K^2-1} + \sqrt{1+K^2-1}\right) = \ln\left(K + \sqrt{K^2-1}\right)$$

$$\Rightarrow K_m = \frac{\sqrt{K^2-1}}{\ln\left(K + \sqrt{K^2-1}\right)} \tag{16}$$

3.1.6 Vitesse et facteur K en fonction de x

En dehors de t_e, les équations de la vitesse finale et du K final déterminées premettent de calculer les paramètres en fonction de t qui n'est pas une donnée de base, mais un résultat. Nous allons à présent rechercher ces équations par rapport à x.

$$\text{L'équation (10) est } v = \frac{c\,t}{\sqrt{\frac{c^2 m_0^2}{F^2} + t^2}} \text{ avec suivant (12) } t = \sqrt{\frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\,m_0}{F}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{c\sqrt{\frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\,m_0}{F}}}{\sqrt{\frac{c^2m_0^2}{F^2} + \frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\,m_0}{F}}} = \frac{c\sqrt{\frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\,m_0}{F}}}{\sqrt{\left(\frac{c\,m_0}{F} + \frac{x}{c}\right)^2}}$$

$$v = \frac{c\sqrt{\frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\,m_0}{F}}}{\frac{c\,m_0}{F} + \frac{x}{c}} = c\frac{\sqrt{\frac{x^2}{c^2}\left(1 + \frac{2m_0c^2}{x\,F}\right)}}{\frac{x}{c}\left(1 + \frac{m_0c^2}{x\,F}\right)}$$

$$v = c\frac{\sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{x\,F}}}{1 + \frac{m_0c^2}{x\,F}} \tag{17}$$

$$\text{et alors } K = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2\frac{\left(1+\frac{2m_0c^2}{x\,F}\right)}{\left(1+\frac{m_0c^2}{x\,F}\right)^2}}{c^2}}}$$

$$K = \frac{1}{\frac{\sqrt{\left(1+\frac{m_0c^2}{x\,F}\right)^2 - \left(1+\frac{2m_0c^2}{x\,F}\right)}}{1+\frac{m_0c^2}{x\,F}}}$$

$$K = \frac{1 + \frac{m_0c^2}{x\,F}}{\sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{x\,F} + \frac{m_0^2c^4}{x^2F^2} - 1 - \frac{2m_0c^2}{x\,F}}}$$

$$K = \frac{1 + \frac{m_0c^2}{x\,F}}{\frac{m_0c^2}{x\,F}} = 1 + \frac{1}{\frac{m_0c^2}{x\,F}}$$

$$K = 1 + \frac{x\,F}{m_0c^2} \tag{18}$$

3.2 Exemple numérique

Avec les mêmes données que pour l'exemple en mécanique classique, à savoir $x = 19\,10^{15}$ et $F/m_0 = 15/1$, la durée d'un demi-voyage vu depuis le point de départ est :

$$t = \sqrt{\frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\,m_0}{F}} = \sqrt{\frac{(19\,10^{15})^2}{(3\,10^8)^2} + \frac{2 \times 19\,10^{15} \times 1}{15}} = 80.897.741 \text{ sec} = 936,3 \text{ jours}$$

La durée totale du voyage est donc de $936,3 \times 2 = 1873$ jours, soit $5,13$ ans.

La vitesse et le facteur K maximal sont atteint au milieu du voyage et vallent :

$$v = c\frac{\sqrt{1+\frac{2m_0c^2}{x\,F}}}{1+\frac{m_0c^2}{x\,F}} = 3\,10^8 \times \frac{\sqrt{1+\frac{2\times1\times(3\,10^8)^2}{19\,10^{15}\times15}}}{1+\frac{1\times(3\,10^8)^2}{19\,10^{15}\times15}} = 0,971\times3\,10^8 = 2,912\,10^8 \text{ m/sec}$$

$$\text{et } K = 1 + \frac{x\,F}{m_0c^2} = 1 + \frac{19\,10^{15}\times 15}{1\times(3\,10^8)^2} = 4,16666$$

Pour les voyageurs dans le vaisseau, la durée totale du voyage est $t_v = t_e/K_m$:

$$K_m = \frac{\sqrt{K^2-1}}{\ln\left(K+\sqrt{K^2-1}\right)} = \frac{\sqrt{4,166^2-1}}{\ln\left(4,166+\sqrt{4,166^2-1}\right)} = 1,921$$

La durée totale du voyage pour les passagers est donc de $1873/1,921 = 975$ jours, soit $2,67$ ans.

3.3 Constatations

L'introduction de la mécanique relativiste dans les équations du mouvement uniformément accéléré a produit un clivage entre les résultats pour les observateurs restant au point de départ et les occupants du vaisseau spacial. Les résultats sont également différents de ceux de la mécanique classique, mais pour des distances et des accélérations très faible, les équations relativistes trouvées se simplifient pour retomber sur les résultats de la mécanique classique.

Dans les équations basée sur la distance x, on constate une précence importante de la fraction $\frac{x\,F}{m_0c^2}$ qui représente le rapport entre l'énergie fournie au numérateur et l'énergie de départ au dénominateur, suivant la fameuse formule $E = mc^2$. On aurait pût dès lors trouver rapidement l'expression de K en posant que l'énergie totale du système après le parcours de la distance x est égale à son énergie de départ plus l'énergie fournie :

$$E = mc^2 = K m_0 c^2 = m_0 c^2 + x\,F \Rightarrow K = \frac{m_0 c^2 + x\,F}{m_0 c^2} = 1 + \frac{x\,F}{m_0 c^2}$$

qu'il a fallus plusieurs pages pour établir par un autre chemin.

En pratique, la durée du voyage vu du point de départ est toujours plus long que le temps mis par la lumière.

4 Relation entre les équations relativiste et classique

4.1 Entre le temps classique et le temps extérieur

Pour la détermination du temps de parcours extérieur, nous avons les deux expressions suivantes :

$$t_c = \sqrt{\frac{2\,m_0\,x}{F}} \text{ en mécanique classique}$$

$$\text{et } t_e = \sqrt{\frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\,m_0}{F}} \text{ en mécanique relativiste}$$

Ces équations nous indiques que t_c est toujours inférieur à t_r. On peut donc définir M_{te} facteur de correction relativiste temporel extérieur tel que :

$$t_e = M_{te} \times t_c$$

$$\Rightarrow M_{te} = \frac{t_r}{t_c} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\,m_0}{F}}}{\sqrt{\frac{2\,m_0\,x}{F}}}$$

$$\Rightarrow {M_{te}}^2 = \frac{\frac{x^2}{c^2} + \frac{2x\,m_0}{F}}{\frac{2\,m_0\,x}{F}} = \frac{\frac{2\,m_0\,x}{F}\left(\frac{xF}{2m_0c^2} + 1\right)}{\frac{2\,m_0\,x}{F}} = 1 + \frac{xF}{2m_0c^2}$$

$$\Rightarrow M_{te} = \sqrt{1 + \frac{xF}{2m_0c^2}} \tag{19}$$

On constate que : ${M_{te}}^2 = 1 + \frac{xF}{2m_0c^2}$ et que $K = 1 + \frac{x\,F}{m_0c^2}$:

$$\Rightarrow 2{M_{te}}^2 = 2 + \frac{xF}{m_0c^2} = 1 + 1 + \frac{xF}{m_0c^2} = 1 + K$$

$$\Rightarrow {M_{te}}^2 = \frac{1+K}{2}$$

$$\Rightarrow M_{te} = \sqrt{\frac{1+K}{2}} \tag{20}$$

Nous obtenons alors une autre équation pour le temps écoulé à l'extérieur du vaisseau (point de départ) :

$$t_e = \sqrt{\frac{2xm_0}{F}}\ \sqrt{\frac{1+K}{2}} \tag{21}$$

4.2 Entre le temps classique et le temps intérieur

Par définition, nous savons que $t_i = \frac{t_e}{K_m}$. En remplaçant les termes de cette équation par leurs valeurs, nous obtenons :

$$t_i = \sqrt{\frac{2xm_0}{F}}\ \sqrt{\frac{1+K}{2}} \times \frac{\ln\left(K + \sqrt{K^2-1}\right)}{\sqrt{K^2-1}}$$

$$\Rightarrow t_i = \frac{\sqrt{\frac{2xm_0}{F}}\ \frac{\sqrt{1+K}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{K+1}\sqrt{K-1}} \times \frac{\ln\left(K + \sqrt{K^2-1}\right)}{\sqrt{K^2-1}}$$

$$\Rightarrow t_i = \sqrt{\frac{2xm_0}{F}} \times \frac{\ln\left(K + \sqrt{K^2-1}\right)}{\sqrt{2(K-1)}} \tag{22}$$

On définit M_{ti} = facteur de correction relativiste temporel intérieur, tel que :

$$t_i = M_{ti} \times t_c \quad \text{avec}$$

$$M_{ti} = \frac{\ln\left(K + \sqrt{K^2-1}\right)}{\sqrt{2(K-1)}} \tag{23}$$

4.3 Exemple Numérique

Toujours avec les mêmes données que pour l'exemple en mécanique classique, à savoir $x = 19\,10^{15}$ et $F/m_0 = 15/1$, la durée d'un demi-voyage vu depuis le point de départ est :

$$t_c = \sqrt{\frac{2\,m_0\,x}{F}} = \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 19\,10^{15}}{15}} = 50.332.230 \text{ sec} = 582,5 \text{ jours}$$

$$\text{et } K = 1 + \frac{x\,F}{m_0 c^2} = 1 + \frac{19\,10^{15} \times 15}{1 \times (3\,10^8)^2} = 4,16666$$

Ce qui nous permet de calculer M_{te} et M_{ti} :

$$M_{te} = \sqrt{\frac{1+K}{2}} = \sqrt{\frac{1+4,16666}{2}} = 1,6073$$

$$M_{ti} = \frac{\ln\left(K + \sqrt{K^2-1}\right)}{\sqrt{2(K-1)}} = \frac{\ln\left(4,16666 + \sqrt{4,16666^2-1}\right)}{\sqrt{2(4,16666-1)}} = 0,83666$$

et donc de déterminer le temps extérieur et le temps intérieur :

$$t_e = M_{te} \times t_c = 1,6073 \times 582,5 = 936,3 \text{ jours}$$

$$t_i = M_{ti} \times t_c = 0,83666 \times 582,5 = 487,3 \text{ jours}$$

ce qui correspondent aux résultats déterminés avec les équations directes.

5 Avec une vitesse initiale non nulle

5.1 Recherche des équations

Pour tenir compte de cette vitesse initiale v_0 non nulle, nous n'allons pas repartir de l'expression relativiste de l'accélération pour nous lancer par la suite dans un problème ardu de composition relativiste des vitesses, mais utiliser un subterfuge. Avec les équations relativistes établies précédemment, à toute vitesse non nulle, ont peut associer une distance relative à la masse et à l'accélération qui seront prisent en compte. On définit de la sorte une distance x_0 et une durée t_0 telle que :

$$x_0 = \frac{(K_0-1)m_0c^2}{F} \text{ avec } K_0 = \frac{c}{\sqrt{c^2-v_0^2}}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{x_0^2}{c^2} + \frac{2x_0\,m_0}{F}}$$

Ces deux résultats permettent alors de déterminer la valeur du temps global t_g pour parcourir la distance $x_0 + x$ ainsi que le temps t pour parcourir la distance x :

$$t_g = \sqrt{\frac{(x_0 + x)^2}{c^2} + \frac{2(x_0 + x)\,m_0}{F}} \Rightarrow t = t_g - t_0 \tag{24}$$

La vitesse et le facteur K finaux seront alors :

$$v = c\frac{\sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{(x_0+x)\,F}}}{1 + \frac{m_0c^2}{(x_0+x)\,F}} \tag{25}$$

$$K = 1 + \frac{(x_0 + x)\,F}{m_0c^2} \tag{26}$$

Pour déterminer la durée du parcours pour les occupants du vaisseau spacial, on détermine :

$$K_{m_0} = \frac{\sqrt{K_0^2 - 1}}{\ln\left(K_0 + \sqrt{K_0^2 - 1}\right)}$$

et

$$K_m = \frac{\sqrt{K^2 - 1}}{\ln\left(K + \sqrt{K^2 - 1}\right)}$$

ce qui permet d'écrire :

$$t_v = \frac{t_g}{K_m} - \frac{t_0}{K_{m_0}} \tag{27}$$

5.2 Exemple numérique

On va prendre les mêmes données que pour les autres exemple en mécanique relativiste, à savoir $x = 19\,10^{15}$ et $F/m_0 = 15/1$, mais avec une vitesse initiale de 0,5c. La durée d'un demi-voyage vu depuis le point de départ est alors :

$$K_0 = \frac{c}{\sqrt{c^2 - (0,5c)^2}} = 1,1547$$

$$\text{donnant } x_0 = \frac{(1,1547-1)\times(3\,10^8)^2}{15} = 9,282\,10^{14} \text{ m}$$

$$\text{et } t_0 = \sqrt{\frac{(9,282\,10^{14})^2}{(3\,10^8)^2} + \frac{2\times 9,282\,10^{14}\times 1}{15}} = 11.546.984 \text{ sec}$$

Nous pouvons alors calculer t_g :

$$t_g = \sqrt{\frac{(9,282\,10^{14}+19\,10^{15})^2}{(3\,10^8)^2} + \frac{2\times(9,282\,10^{14}+19\,10^{15})}{15}} = 84.081.413 \text{ sec}$$

et $t = t_g - t_0 = 84.081.413 - 11.546.984 = 72.534.429 \text{ sec} = 839,5 \text{ jours}.$

$$K = 1 + \frac{(9,282\,10^{14}+19\,10^{15})\,15}{(3\,10^8)^2} = 4,3214$$

Nous avons alors :

$$K_{m_0} = \frac{\sqrt{1,1547^2-1}}{\ln\left(1,1547+\sqrt{1,1547^2-1}\right)} = 1,0511$$

et

$$K_m = \frac{\sqrt{4,3214^2-1}}{\ln\left(4,3214+\sqrt{4,3214^2-1}\right)} = 1,9617$$

donc

$$t_v = \frac{84.081.413}{1,9617} - \frac{11.546.984}{1,0511} = 31.875.885 \text{ sec } = 368,9 \text{ jours}$$