Halo sphérique de densité $\rho(r)$, de rayon $R_h > 100\ kpc$.

Modèle de densité:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right)^{-\frac{3\beta}{2}}$$

Pour simplifier, on prend $\beta = \frac{2}{3} \simeq 0.67$ (proche du "best fit" trouvé par Miller et Bregman en 2013 dans leur publication "The Structure of the Milky Way's Hot Gas Halo"). On a alors

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right)^{-1}$$

et $\rho(r) \simeq \dfrac{\rho_0 r_c^2}{r^2}$ pour $r \gg r_c$.

A l'intérieur du halo,

$$\begin{aligned}
M_{int}(R) &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr \\
&= 4\pi\rho_0 \int_0^R \frac{r_c^2 r^2}{r_c^2 + r^2} dr \\
&= 4\pi\rho_0 r_c^2 \left(R - r_c \arctan\frac{R}{r_c}\right) \\
g(R) &= 4\pi \frac{G\rho_0}{R^2} r_c^2 \left(R - r_c \arctan\frac{R}{r_c}\right)
\end{aligned}$$

Les valeurs typiques de r_c sont $\lesssim 1kpc$, on s'intéresse donc au cas $R \gg r_c$, dans lequel on obtient $M_{int}(R) \simeq 4\pi\rho_0 r_c^2 R$ et $g(R) \simeq 4\pi\dfrac{G\rho_0 r_c^2}{R}$

D'autre part, si le halo est statique,

$$\frac{\partial P}{\partial r}(R) = -\rho(R) g(R)$$

Par ailleurs, en considérant qu'on a affaire à un gaz parfait, $P(r) = k\rho(r)T(r)$, d'où $\dfrac{\partial P}{\partial r} = k\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial r} T + \rho \dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$ et, pour $R \gg r_c$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial r}(R) &= k\left(-2\frac{\rho_0 r_c^2}{R^3} T(R) + \frac{\rho_0 r_c^2}{R^2}\frac{\partial T}{\partial r}(R)\right) \\
k\left(-2\frac{\rho_0 r_c^2}{R^3} T(R) + \frac{\rho_0 r_c^2}{R^2}\frac{\partial T}{\partial r}(R)\right) &= -\frac{\rho_0 r_c^2}{R^3} 4\pi G \rho_0 r_c^2 \\
k\left(-2T(R) + R\frac{\partial T}{\partial r}(R)\right) &= -4\pi G \rho_0 r_c^2
\end{aligned}$$

D'où

$$\rho_0 r_c^2 = \frac{k}{4\pi G}\left(2T(R) - R\frac{\partial T}{\partial r}(R)\right)$$

Mais si le halo est en rotation avec une vitesse linéaire uniforme v_h, il faut tenir compte de l'accélération centrifuge, et

$$\frac{\partial P}{\partial r}(R) = -\rho(R)g(R) + \rho(R)\frac{v_h^2}{R}$$

Pour autant que le modèle de densité du halo reste valable dans ce cas, on obtient pour $R \gg r_c$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial r}(R) &\simeq -\rho(R)\left(4\pi\frac{G\rho_0 r_c^2}{R} - \frac{v_h^2}{R}\right) \\
&\simeq -\frac{\rho(R)}{R}\left(4\pi G\rho_0 r_c^2 - v_h^2\right) \\
&\simeq -\frac{\rho_0 r_c^2}{R^3}\left(4\pi G\rho_0 r_c^2 - v_h^2\right)
\end{aligned}$$

Dans l'hypothèse d'un gaz parfait, on a alors pour $R \gg r_c$

$$k\left(-2\frac{\rho_0 r_c^2}{R^3}T(R) + \frac{\rho_0 r_c^2}{R^2}\frac{\partial T}{\partial r}(R)\right) \simeq -\frac{\rho_0 r_c^2}{R^3}\left(4\pi G\rho_0 r_c^2 - v_h^2\right)$$

D'où

$$\rho_0 r_c^2 \simeq \frac{1}{4\pi G}\left[k\left(2T(R) - R\frac{\partial T}{\partial r}(R)\right) + v_h^2\right]$$

Pour une même courbe de température (déduite de l'observation du spectre d'émission de rayons X du halo), cela conduit à une valeur de ρr_c^2 supérieure de $\frac{v_h^2}{4\pi G}$ à celle estimée dans l'hypothèse d'un halo statique. Avec $v_h = 183\ km/s$,

$$(\rho_0 r_c^2)_{rotation} \simeq (\rho_0 r_c^2)_{statique} + 4\ 10^{19}\ kg.m^{-1}$$

$$M_{int}(100kpc)_{rotation} \simeq M_{int}(100kpc)_{statique} + 1.5\ 10^{42}\ kg$$