

## Impact de la rotation du halo de gaz chaud sur sa masse

On considère un halo sphérique de densité  $\rho(r)$ , de rayon  $R_h > 100 \text{ kpc}$ .  
On choisit (comme Miller et Bregman) le modèle de densité du halo

$$\rho(r) = \rho_0 \left( 1 + \left( \frac{r}{r_c} \right)^2 \right)^{-\frac{3\beta}{2}}$$

Pour simplifier, on prend  $\beta = \frac{2}{3} \simeq 0.67$  (proche du "best fit" trouvé par Miller et Bregman en 2013 dans leur publication "The Structure of the Milky Way's Hot Gas Halo"). On a alors

$$\rho(r) = \rho_0 \left( 1 + \left( \frac{r}{r_c} \right)^2 \right)^{-1}$$

$$\rho(r) \simeq \frac{\rho_0 r_c^2}{r^2} \text{ pour } r \gg r_c$$

A l'intérieur du halo,

$$\begin{aligned} M_{int}(R) &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr \\ &= 4\pi \rho_0 \int_0^R \frac{r_c^2 r^2}{r_c^2 + r^2} dr \\ &= 4\pi \rho_0 r_c^2 \left( R - r_c \arctan \frac{R}{r_c} \right) \\ g_{halo}(R) &= 4\pi \frac{G\rho_0}{R^2} r_c^2 \left( R - r_c \arctan \frac{R}{r_c} \right) \end{aligned}$$

Les valeurs typiques de  $r_c$  sont  $\lesssim 1 \text{ kpc}$ , on s'intéresse donc au cas  $R \gg r_c$ , dans lequel on obtient  $M_{int}(R) \simeq 4\pi \rho_0 r_c^2 R$  et  $g_{halo}(R) \simeq 4\pi \frac{G\rho_0 r_c^2}{R}$

### Détermination de $\rho_0 r_c^2$ pour un halo statique

Dans l'hypothèse d'un halo en équilibre hydrostatique,

$$\frac{\partial P}{\partial r}(R) = -\rho(R)g(R) = -\rho(R)(g_{halo}(R) + g_{disque}(R))$$

où  $g_{disque}$  est l'accélération gravitationnelle due à l'ensemble des composantes du disque (étoiles, disque gazeux, poussières).

Par ailleurs, en considérant qu'on a affaire à un gaz parfait,  $P(r) = k\rho(r)T(r)$ ,

d'où  $\frac{\partial P}{\partial r} = k \left( \frac{\partial \rho}{\partial r} T + \rho \frac{\partial T}{\partial r} \right)$  et, pour  $R \gg r_c$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r}(R) &= k \left( -2 \frac{\rho_0 r_c^2}{R^3} T(R) + \frac{\rho_0 r_c^2}{R^2} \frac{\partial T}{\partial r}(R) \right) \\ k \left( -2 \frac{\rho_0 r_c^2}{R^3} T(R) + \frac{\rho_0 r_c^2}{R^2} \frac{\partial T}{\partial r}(R) \right) &= -\frac{\rho_0 r_c^2}{R^3} 4\pi G \rho_0 r_c^2 - \frac{\rho_0 r_c^2}{R^2} g_{disque}(R) \\ k \left( -2T(R) + R \frac{\partial T}{\partial r}(R) + R g_{disque}(R) \right) &= -4\pi G \rho_0 r_c^2 \end{aligned}$$

D'où

$$(\rho_0 r_c^2)_{statique} = \frac{k}{4\pi G} \left( 2T(R) - R \frac{\partial T}{\partial r}(R) - R g_{disque}(R) \right)$$

### Détermination de $\rho_0 r_c^2$ pour un halo en rotation

Si le halo est en rotation avec une vitesse linéaire uniforme  $v_h$ , il faut tenir compte de l'accélération centrifuge, et

$$\frac{\partial P}{\partial r}(R) = -\rho(R) (g_{halo}(R) + g_{disque}(R)) + \rho(R) \frac{v_h^2}{R}$$

Pour autant que le modèle de densité du halo reste valable dans ce cas, on obtient pour  $R \gg r_c$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r}(R) &\simeq -\rho(R) \left( 4\pi \frac{G\rho_0 r_c^2}{R} + g_{disque}(R) - \frac{v_h^2}{R} \right) \\ &\simeq -\frac{\rho(R)}{R} (4\pi G\rho_0 r_c^2 + R g_{disque}(R) - v_h^2) \\ &\simeq -\frac{\rho_0 r_c^2}{R^3} (4\pi G\rho_0 r_c^2 + R g_{disque}(R) - v_h^2) \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse d'un gaz parfait, on a alors pour  $R \gg r_c$

$$k \left( -2 \frac{\rho_0 r_c^2}{R^3} T(R) + \frac{\rho_0 r_c^2}{R^2} \frac{\partial T}{\partial r}(R) \right) \simeq -\frac{\rho_0 r_c^2}{R^3} (4\pi G\rho_0 r_c^2 + R g_{disque}(R) - v_h^2)$$

D'où

$$(\rho_0 r_c^2)_{rotation} \simeq \frac{1}{4\pi G} \left[ k \left( 2T(R) - R \frac{\partial T}{\partial r}(R) \right) - R g_{disque}(R) + v_h^2 \right]$$

### Impact sur la masse du halo

Pour une même courbe de température (déduite de l'observation du spectre d'émission de rayons X du halo), cela conduit à une valeur de  $\rho_0 r_c^2$  supérieure de  $\frac{v_h^2}{4\pi G}$  à celle estimée dans l'hypothèse d'un halo statique. Avec  $v_h = 183 \text{ km/s}$ ,

$$\begin{aligned} (\rho_0 r_c^2)_{rotation} &\simeq (\rho_0 r_c^2)_{statique} + 4 \times 10^{19} \text{ kg.m}^{-1} \\ M_{int}(100 \text{ kpc})_{rotation} &\simeq M_{int}(100 \text{ kpc})_{statique} + 1.5 \times 10^{42} \text{ kg} \end{aligned}$$

### Impact sur la vitesse de rotation des étoiles

Pour  $R \gg r_c$ ,

$$g_{halo}(R) \simeq 4\pi \frac{G\rho_0 r_c^2}{R} \Rightarrow v^2(R) \simeq 4\pi G\rho_0 r_c^2 + R g_{disque}(R)$$

avec  $4\pi G\rho_0 r_c^2 \simeq 3.35 \times 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ , constante,

et, en périphérie du disque de la galaxie,  $R g_{disque}(R) \simeq \frac{G M}{R}$ , où  $M$  est la masse de matière ordinaire de la galaxie (hors halo).

Avec  $M$  de l'ordre de  $10^{11}$  masses solaires, soit environ  $2 \times 10^{41} \text{ kg}$ , pour  $R \simeq 4 \times 10^{20} \text{ m} \simeq 13 \text{ kpc}$  les deux termes de  $v^2$  sont approximativement égaux. Ceci correspond remarquablement bien aux résultats synthésés par la figure 1, habituellement expliqués par la présence d'un halo de matière noire.

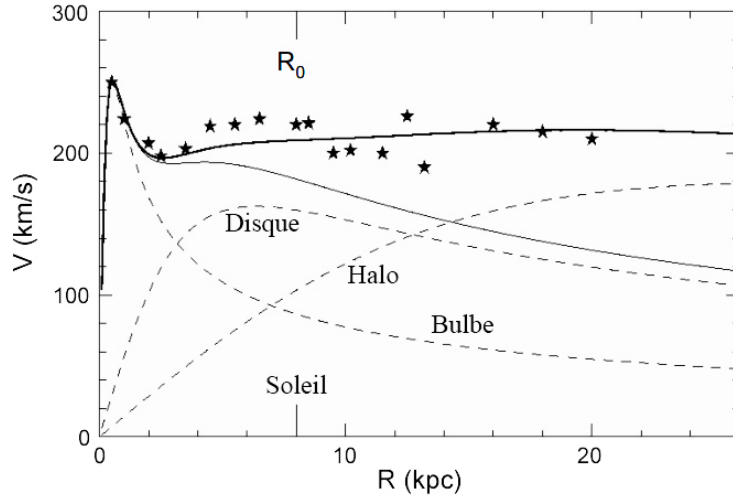


Figure 1: Courbe de rotation de la Voie Lactée, avec les contributions des différentes composantes (bulbe, disque, halo de "matière noire")

## Une explication de la formule MOND ?

La forme en  $1/R$  de  $g_{halo}(R)$  rappelle évidemment celle de MOND,

$$g_{mond} = \frac{\sqrt{GMa_0}}{R}$$

où  $M$  est la masse de matière ordinaire de la galaxie.

D'autre part, les ordres de grandeur sont compatibles : pour une masse de matière ordinaire de la galaxie estimée à  $10^{11}$  masses solaires, soit environ  $2 \times 10^{41} kg$ , et  $a_0 \simeq 10^{-10} m.s^{-2}$ ,

$$g_{mond} \simeq \frac{1}{R} \times 3.65 \times 10^{10}$$

à comparer avec

$$g_{halo} \simeq \frac{1}{R} \times 3.35 \times 10^{10}$$

Cependant cela pourrait être une simple coïncidence numérique. Pour que cette relation soit vraie avec une valeur identique de  $a_0$  pour toutes les galaxies (hypothèse MOND), il faudrait en effet que la relation entre la masse de matière ordinaire des galaxies hors halo et la masse (ou plutôt le profil de densité) de leur halo de gaz chaud soit toujours la même:

$$\sqrt{GMa_0} = 4\pi G\rho_0 r_c^2$$