1 Moyenne des équations d'Einstein pour les scalaires

1.1 Formalisme et notations

On utilise le formalisme et les notations de [On Average Properties of Inhomogeneous Fluids in General Relativity I: Dust Cosmologies, Buchert, 1999], pour un espace-temps rempli d'un fluide de pression identiquement nulle ("poussière") et irrotationnel, et un découpage en hypersurfaces spatiales orthogonales en tout point au flux comobile.

Le système de coordonnées choisi, $x^\mu = (t, X^i)$, orthogonal au flux est défini de manière à étiqueter les géodésiques de l'espace-temps, i.e. $u^\nu u^\mu_{;\nu} = 0$. Avec ce choix les coordonnées sont "comobiles". Ainsi, dans le découpage $3 + 1$ de l'espace-temps, les coordonnées étiquettent aussi les éléments du fluide dans l'espace tri-dimensionnel, $\dot{X}^k = 0$. On peut choisir la métrique g_{ij} de l'espace 3D telle que

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} X^i X^j$$

Voir [Buchert, 1999] pour la justification théorique de la démarche, s'appuyant sur l'équivalence des équations du formalisme $3 + 1$ de la relativité générale avec les équations d'Einstein.

On obtient en particulier les deux équations scalaires [1]:

$$\frac{1}{2}R + \frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^2 = 8\pi G\rho + \Lambda \tag{1}$$

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + 2\sigma^2 + 4\pi G\rho - \Lambda = 0 \tag{2}$$

où R est la trace du tenseur de Ricci 3D (courbure intrinsèque de l'hypersurface), θ est la trace du tenseur d'expansion[2] , $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^i_j\sigma^j_i$ le taux de cisaillement (σ_{ij} étant le tenseur de cisaillement, symétrique et de trace nulle).

En utilisant deux des invariants scalaires du tenseur d'expansion :

$$\mathbf{I} = \theta \text{ , } \mathbf{II} = \frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^2$$

les deux équations précédentes peuvent aussi s'écrire :

$$\frac{1}{2}R + \mathbf{II} = 8\pi G\rho + \Lambda$$

$$\dot{\theta} + \mathbf{I}^2 - 2\mathbf{II} + 4\pi G\rho - \Lambda = 0$$

1.2 Définition de la moyenne d'un champ scalaire sur un volume

La moyenne spatiale d'un champ scalaire ψ sur un domaine compact quelconque D est définie par l'intégrale :

$$\langle \psi(t, X^i) \rangle_D = \frac{1}{V_D} \int_D \psi(t, X^i) J(t, X^i) d^3X$$

où $J(t, X^i) = \sqrt{det(g_{ij})}$, et $V_D = \int_D J d^3X$ est le volume du domaine D.

En dérivant par rapport au temps, on obtient l'identité $\dot{J} = \theta J$, et $\langle\theta\rangle_D = \frac{\dot{V_D}}{V_D}$.

1. Dans ce qui suit on choisit un sytème d'unités dans lequel $c = 1$
2. Selon le nom que lui donne Buchert en anglais (expansion tensor). Le tenseur d'expansion est symétrique et s'écrit $\Theta_{ij} = \frac{1}{3}\theta g_{ij} + \sigma_{ij}$. En français et en mécanique des milieux continus on parle plutôt de tenseur des contraintes.

On définit un facteur d'échelle effectif via le volume normalisé par le volume initial V_{D_0}

$$a_D(t) = \left(\frac{V_D(t)}{V_{D_0}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Le facteur d'échelle effectif est donc relié à la trace du tenseur d'expansion par $\frac{\dot{a_D}}{a_D} = \frac{1}{3}\langle\theta\rangle_D$.

La masse au repos (transportée avec le fluide comobile) du domaine D est conservée, donc

$$M_D = \int_D \rho J d^3X = const. \Leftrightarrow \langle\rho\rangle_D = \frac{M_D}{V_{D_0} a_D^3}$$

D'autre part, pour tout champ scalaire ψ,

$$\langle\psi\rangle_D\dot{} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V_D}\int_D \psi J d^3X\right) = -\frac{\dot{V_D}}{V_D}\langle\psi\rangle_D + \frac{1}{V_D}\int_D \dot{\psi} J d^3X + \frac{1}{V_D}\int_D \psi\theta J d^3X$$

D'où l'importante **règle de commutation**

$$\langle\psi\rangle_D\dot{} - \left\langle\dot{\psi}\right\rangle_D = \langle\theta\psi\rangle_D - \langle\theta\rangle_D\langle\psi\rangle_D$$

1.3 Équations pour le facteur d'échelle effectif

1.3.1 Énoncé des équations selon [Buchert, 1999]

$$3\left(\frac{\dot{a}_D}{a_D}\right)^2 - 8\pi G\langle\rho\rangle_D - \Lambda + \frac{1}{2}\langle R\rangle_D = -\frac{1}{2}Q_D \tag{3}$$

$$3\frac{\ddot{a_D}}{a_D} + 4\pi G\langle\rho\rangle_D - \Lambda = Q_D \tag{4}$$

Dans ces deux équations apparaissent le scalaire de courbure spatiale (trace du tenseur de Ricci 3D) moyenné

$$\frac{1}{2}\langle R\rangle_D = 8\pi G\langle\rho\rangle_D + \Lambda - \langle\mathbf{II}\rangle_D \tag{5}$$

et un terme de "backreaction" [3]

$$Q_D = 2\langle\mathbf{II}\rangle_D - \frac{2}{3}\langle\mathbf{I}\rangle_D^2 = \frac{2}{3}\left\langle(\theta - \langle\theta\rangle_D)^2\right\rangle_D - 2\left\langle\sigma^2\right\rangle_D \tag{6}$$

où apparaît avec un signe positif la variance du taux d'expansion et avec un signe négatif le taux de cisaillement. Qualitativement, l'effet de la backreaction dépend de la "compétition" entre ces deux termes.

On reconnaît dans les équations (3) et (4) la forme des équations de Friedmann, modifiées par la présence d'un scalaire de courbure spatiale moyenné ne se résumant pas au terme k/a^2 (k constant), et de la backreaction.

La démonstration de ces équations n'est pas détaillée dans [Buchert, 1999]. On va le faire ici, mais le lecteur pressé pourra sauter cette section.

3. $2\langle\mathbf{II}\rangle_D - \frac{2}{3}\langle\mathbf{I}\rangle_D^2 = \frac{2}{3}\left(\left\langle\theta^2\right\rangle_D - \langle\theta\rangle_D^2\right) - 2\left\langle\sigma^2\right\rangle_D = \frac{2}{3}\left\langle(\theta - \langle\theta\rangle_D)^2\right\rangle_D - 2\left\langle\sigma^2\right\rangle_D$ (formule de König)

1.3.2 Preuve

Pour établir les équations ci-dessus, on va moyenner les équations locales énoncées précédemment. D'une part, l'équation (2) donne

$$\left\langle \dot{\theta} \right\rangle_D + \frac{1}{3} \left\langle \theta^2 \right\rangle_D + 2 \left\langle \sigma^2 \right\rangle_D + 4\pi G \left\langle \rho \right\rangle_D - \Lambda = 0$$

Selon la règle de commutation,

$$\left\langle \theta \right\rangle_D^{\cdot} + \left\langle \theta \right\rangle_D^2 - \left\langle \theta^2 \right\rangle_D + \frac{1}{3} \left\langle \theta^2 \right\rangle_D + 2 \left\langle \sigma^2 \right\rangle_D + 4\pi G \left\langle \rho \right\rangle_D - \Lambda = 0$$

$$3\frac{\ddot{a_D}}{a_D} - 3\left(\frac{\dot{a_D}}{a_D}\right)^2 + \left\langle \theta \right\rangle_D^2 - \frac{2}{3} \left\langle \theta^2 \right\rangle_D + 2 \left\langle \sigma^2 \right\rangle_D + 4\pi G \left\langle \rho \right\rangle_D - \Lambda = 0$$

$$3\frac{\ddot{a_D}}{a_D} + \frac{2}{3} \left\langle \theta \right\rangle_D^2 - \frac{2}{3} \left\langle \theta^2 \right\rangle_D + 2 \left\langle \sigma^2 \right\rangle_D + 4\pi G \left\langle \rho \right\rangle_D - \Lambda = 0$$

$$3\frac{\ddot{a_D}}{a_D} + \frac{2}{3} \left\langle \mathbf{I} \right\rangle_D^2 - 2 \left\langle \mathbf{II} \right\rangle_D + 4\pi G \left\langle \rho \right\rangle_D - \Lambda = 0$$

où on reconnaît la backreaction $Q_D = 2 \left\langle \mathbf{II} \right\rangle_D - \frac{2}{3} \left\langle \mathbf{I} \right\rangle_D^2$.
En introduisant ce terme dans l'équation précédente, on retrouve l'équation (4):

$$3\frac{\ddot{a_D}}{a_D} + 4\pi G \left\langle \rho \right\rangle_D - \Lambda = Q_D$$

D'autre part on obtient directement l'équation (5) en moyennant l'équation locale (1) écrite à l'aide de l'invariant scalaire **II** :

$$\frac{1}{2} \left\langle R \right\rangle_D = 8\pi G \left\langle \rho \right\rangle_D + \Lambda - \left\langle \mathbf{II} \right\rangle_D$$

et en l'exprimant à l'aide de Q_D on obtient

$$\frac{1}{2} \left\langle R \right\rangle_D = 8\pi G \left\langle \rho \right\rangle_D + \Lambda - \frac{1}{2} Q_D - \frac{1}{3} \left\langle \mathbf{I} \right\rangle_D^2$$

où, en utilisant $\left\langle \mathbf{I} \right\rangle_D = \left\langle \theta \right\rangle_D = 3\frac{\dot{a_D}}{a_D}$, on reconnaît l'équation (3) :

$$3\left(\frac{\dot{a_D}}{a_D}\right)^2 + \frac{1}{2} \left\langle R \right\rangle_D = 8\pi G \left\langle \rho \right\rangle_D + \Lambda - \frac{1}{2} Q_D$$