

Métrie Dynamique 3D+1 V02

Michel Canac

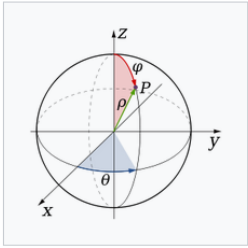
Pseudo Futura : marchusbloch

marchusbloch690@orange.fr

et l'intervalle

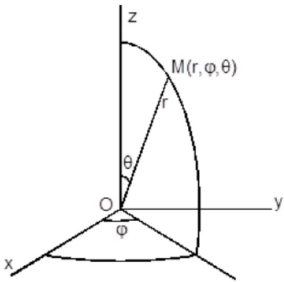
$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2 - \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

$$\begin{cases} x &= \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \varphi \end{cases}$$



Coordonnées
sphériques

2 – Mise en équations



Dans un
Minkowski l'élé

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

L'intervalle dans la géométrie tridimensionnelle à symétrie sphérique est donné par la relation :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) :$$

$\nu(t, r)$, $\lambda(t, r)$, $R(t, r)$ sont des fonctions des coordonnées de base t et r (t est ici exprimé en mètres)

Cette définition est plus générale que celle de Schwarzschild, qui est définie par :

$$(ds^2)_{\text{Schwarzschild}} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Pour cette métrique, Schwarzschild a utilisé les possibilités de transformation arbitraires des coordonnées pour simplifier le problème. Cependant, dans ce document, on utilisera une autre transformation ; pour pouvoir faire certaines vérifications, on garde des possibilités élargies en maintenant trois fonctions dans la métrique.

$$g_{00} = e^{2\nu}; g_{11} = -e^{2\lambda}; g_{22} = -R^2; g_{33} = -R^2 \sin^2 \theta;$$

$$g^{00} = e^{-2\nu}; g^{11} = -e^{-2\lambda}; g^{22} = -1/R^2; g^{33} = -1/(R^2 \sin^2 \theta);$$

Rappel:

Les Christoffels sont donnés par : $\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$

Le tenseur de Ricci est : $R_{ik} = R_{ilk}^l = g^{lm} R_{limk}$

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l$$

$$\Gamma_{00}^0 = v^t; \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = v^r; \Gamma_{11}^0 = \lambda^t e^{-2(v-\lambda)}; \Gamma_{00}^1 = v^r e^{2(v-\lambda)}; \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \lambda^t; \Gamma_{11}^1 = \lambda^r$$

Calcul du tenseur de Ricci ; les lettres en exposants indiquent des dérivées partielles.

(par exemple: $R^t = \frac{\partial R}{\partial t}; R^{tt} = \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}$)

$$R_{00} = v^t \left(\lambda^t + \frac{2}{R} R^t \right) - \left(\lambda^t \lambda^t + \lambda^{tt} + \frac{2}{R} R^{tt} \right) - e^{2v-2\lambda} \left\{ (v^{rr} + v^r(v^r - \lambda^r)) + v^r \frac{2}{R} R^r \right\}$$

$$R_{11} = \lambda^r \left(v^r + 2 \frac{R^r}{R} \right) - v^r v^r - \left(v^{rr} + 2 \frac{R^{rr}}{R} \right) - e^{2\lambda-2v} \left\{ \lambda^t (\lambda^t - v^t) + \lambda^{tt} + \lambda^t 2 \frac{R^t}{R} \right\}$$

$$R_{22} = 1 + e^{-2v} \{ R^t R^t + R R^{tt} - (v^t - \lambda^t) R R^t \} - e^{-2\lambda} \{ R^{rr} R + R^r R^r + R^r R (v^r - \lambda^r) \}$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta \{ 1 + e^{-2v} (R^{tt} R + R^t R^t + R^t R (-v^t + \lambda^t)) - e^{-2\lambda} (R^r R^r + R^{rr} R + R^r R (v^r - \lambda^r)) \}$$

$$R_{01} = R_{10} = \frac{2}{R} (-R^{tr} + v^r R^t + \lambda^t R^r)$$

$$R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0; \text{ tous les termes symétriques sont nuls}$$

$$R_{33} \text{ est proportionnel à } R_{22}$$

Au final, l'annulation du tenseur de Ricci fournit 4 équations (solution dans le vide) :

$$R_{00} = 0; R_{01} = 0; R_{11} = 0; R_{22} = 0$$

La solution de Schwarzschild consiste à imposer : $R=r$. D'où la relation :

$$R_{01} = R_{10} = \frac{2}{R} (\lambda^t R^r) = 0 \Rightarrow \lambda^t = 0, \text{ puis, en utilisant les autres relations: } v^t = 0$$

Donc, dans cette métrique, les fonctions inconnues ne dépendent pas de la coordonnée t .

Comme une relation tensorielle est valable dans tout système de coordonnées valide, on en déduit qu'il ne peut exister de métrique à symétrie sphérique non statique. Cependant, nous explorons quand même les possibilités offertes par un système de coordonnées particulier :

Choisissons maintenant un autre système de coordonnées ; on impose la relation : $\lambda = v$

$$R_{01} = R_{10} = \frac{2}{R} (-R^{tr} + v^r R^t + v^t R^r) = 0 \quad (\lambda = v)$$

Maintenant, cette équation n'interdit plus a priori l'existence d'une solution dépendant de la coordonnée t .

En combinant les équations données par le tenseur de Ricci, on aboutit au système de 4 équations différentielles suivant, où les coordonnées de base sont r et t , et les inconnues sont : R et v

$$(R^t e^{-2v})^t - (R^r e^{-2v})^r = 0 \quad (1)$$

$$(R^2)^{rr} - (R^2)^{tt} - 2e^{2v} = 0 \quad (2)$$

$$R^{tt} + R^{rr} + R v^{tt} + R v^{rr} = 0 \quad (3) \text{ qu'on peut réécrire sous la forme ci-dessous}$$

$$(R^2 v^t)^t + (R^2 v^r)^r + R e^{2v} \{ (R^t e^{-2v})^t + (R^r e^{-2v})^r \} = 0 \quad (3bis)$$

$$-R^{tr} + v^r R^t + v^t R^r = 0 \quad (4)$$

L'équation (1) peut être écrite sous la forme :

$$(R^t e^{-2v} - F^r)^t = (R^r e^{-2v} - F^t)^r; \text{ où } F(r, t) \text{ est une fonction deux fois différentiable arbitraire.}$$

L'introduction de la fonction auxiliaire F permet d'obtenir moyennant des combinaisons entre les équations

$$(1) \text{ et } (4) \text{ la relation suivante: } F^{rr} + F^{tt} = 0$$

F est donc solution d'une équation de Laplace autonome, ce qui entraîne la possibilité d'essayer une infinité de solutions pour cette fonction.

Pour commencer, on essaie la solution la plus simple :

$$F = t + 2a\epsilon r t - at^2 + 2ar^2 \text{ avec } a \text{ et } \epsilon = \text{constantes}$$

On vérifie facilement, d'une part que cette fonction permet de vérifier l'équation de Laplace, et d'autre part, que, si l'on pose : $a=0$, alors on retrouve la métrique statique, qui se trouve, au bout du compte être identique à la métrique de Schwarzschild.

La procédure de résolution des équations montre qu'il faut procéder en plusieurs étapes. La première étape consiste à combiner les équations (1) et (4) pour obtenir des relations préliminaires, dont l'équation de Laplace sur F. Ensuite, il suffit de traiter l'une des deux équations (2) ou (3), pour obtenir une solution. Cette procédure n'est pas propre au calcul d'une métrique dynamique, le calcul de la métrique statique se fait aussi en utilisant d'abord (1) et (4), puis (2) ou (3) pour obtenir la solution. On contrôle après coup que la solution obtenue vérifie bien l'équation non utilisée pour la résolution (3) ou (2).

Dans le cas de la recherche d'une métrique dynamique, on effectue donc deux calculs distincts. Le premier avec les équations (1)+(2)+(4), le deuxième avec (1)+(3)+(4).

Les deux calculs fournissent chacun une solution, mais les solutions ne sont pas identiques.

Pour les deux solutions, on obtient la condition nécessaire : $\epsilon = 0$

On a les résultats suivants (calculs complets disponibles):

$$e^{2\nu} = \frac{1}{(1 - 2at)^2 - (2ar)^2} \left(1 - 2\frac{GM}{Rc^2}\right) \text{ solution avec équation (2)}$$

$$e^{2\nu} = \frac{1}{(1 - 2at)^2 + (2ar)^2} \left(1 - 2\frac{GM}{Rc^2}\right) \text{ solution avec équation (3)}$$

Le résidu de l'équation(3) pour la solution obtenue avec l'équation(2) est: $Res \approx 24 (ar)^2$

On vérifie que, pour $a=0$, on obtient dans les deux cas le résultat de la métrique statique.

La constante « a » a pour dimension L^{-1} ; on peut introduire la constante a_1 : $a_1 = a c^2$ au lieu de a.

Dans ce cas, a_1 est une constante d'accélération (comme dans MOND).

La condition trouvée : $\epsilon = 0$ impose une contrainte forte sur la fonction F : $F^{rt} = 0$.

En effet, cette condition montre que, si elle est une condition nécessaire quelle que soit la fonction d'essai F, solution de l'équation de Laplace, alors les deux solutions trouvées sont les seules possibles.

Pour tenter de distinguer les deux solutions trouvées, on calcule la courbure scalaire K de la métrique.

La courbure scalaire est obtenue par contraction du tenseur de Ricci. On obtient :

$$K = \frac{2}{R} \{(R^t e^{-2\nu})^t - (R^r e^{-2\nu})^r\} - 2 \frac{e^{-2\nu}}{R^2} (e^{2\nu} + (RR^t)^t - (RR^r)^r)$$

$$K = \frac{2}{R} \times \text{équation(1)} - \frac{2e^{-2\nu}}{R^2} \times \text{équation(2)}$$

On constate donc que la courbure scalaire est nulle lorsqu'on utilise l'équation (2), mais ne l'est pas lorsqu'on utilise l'équation (3). La solution avec l'équation (2) se distingue donc de la solution avec l'équation (3) sur ce point.

De plus, on observe la condition suivante : la correction apportée par la métrique dynamique est linéaire en première approximation par rapport au paramètre « a » à cause du terme : $(1-2at)^2$, mais le résidu trouvé sur l'équation non vérifiée est en a^2 . En conséquence, la correction en « a » pourrait être acceptable au deuxième ordre près.

On considère donc par la suite uniquement la solution obtenue avec l'équation (2)

La solution complète est donnée par les deux relations suivantes :

$$e^{2\nu} = \frac{1}{(1-2at)^2 - (2ar)^2} \left(1 - 2 \frac{GM}{Rc^2}\right)$$

$$\frac{2ar}{1-2at} = \tanh\{2az\} \quad \text{où } z = \left(R + (2GM/c^2) \text{Log}(R - 2GM/c^2)\right)$$

$$D' où l'on déduit: e^{2\nu} = \frac{\cosh^2\{2az\}}{(1-2at)^2} \left(1 - 2 \frac{GM}{Rc^2}\right)$$

Les formules ci-dessus définissent implicitement la fonction $R(tr)$. Elle montre que R ne dépend de r et de t que par l'intermédiaire du rapport : $\frac{2ar}{1-2at}$. Pour des raisons de commodités de calcul, on introduit la variable φ telle que :

$$\tan \varphi = \frac{2ar}{1-2at} ; \quad \text{on a : } R^\varphi = \frac{1}{2a \cos 2\varphi} \left(1 - \frac{2GM/c^2}{R}\right)$$

Au final, la situation est la suivante : Nous avons défini une métrique dynamique unique, vérifiant les équations d'Einstein dans le vide, à une exception près : l'équation numéro (3) n'est vérifiée qu'au deuxième ordre près par rapport au coefficient de correction dynamique « a ».

La phase suivante va consister à calculer les géodésiques de cette métrique :

On utilise comme coordonnées de base : r, t, θ, ϕ . On doit donc définir 4 intégrales premières pour les géodésiques. On obtient d'abord deux intégrales premières sur les angles :

$$\theta = \text{constante} ; \quad \text{on impose alors: } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ pour des raisons de simplicité des calculs}$$

$$R^2 \frac{d\phi}{d\sigma} = h = \text{constante} : \text{ exprime la conservation du moment cinétique}$$

L'expression de la conservation de l'intervalle fournit l'intégrale première suivante:

$$e^{2\nu} \left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 - e^{2\nu} \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 - R^2 \left(\frac{d\phi}{d\sigma}\right)^2 = \kappa$$

($\kappa = 1$ pour les particules massiques, et $\kappa = 0$ pour les photons)

La quatrième intégrale est obtenue sous la forme :

$$\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R}\right) \frac{d}{d\sigma} \text{Log}((1-2at)^2 - (2ar)^2) = -4a E_r : \quad E_r = \frac{\text{énergie}}{mc^2}$$

On vérifie qu'en passant à la limite : a tendant vers zéro, on obtient :

$$\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R}\right) \frac{dt}{d\sigma} = E_r : \text{ forme de l'intégrale première en métrique statique}$$

De ces 4 intégrales, on déduit la relation :

$$\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM/c^2}{R}\right) \left(\left(\frac{h^2}{R^2}\right) + \kappa\right) = (E_r)^2 :$$

Dans la métrique statique, on a exactement la même relation. On déduit :

$$\left(\frac{dR}{d\phi} \frac{d\phi}{d\sigma}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM/c^2}{R}\right) \left(\left(\frac{h^2}{R^2}\right) + \kappa\right) = (E_r)^2 \Rightarrow \left(\frac{dR}{d\phi} \frac{h}{R^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM/c^2}{R}\right) \left(\left(\frac{h^2}{R^2}\right) + \kappa\right) = (E_r)^2$$

Utilisant le paramètre $u=1/R$, on obtient :

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 h^2 + (1 - 2u GM/c^2)(h^2 u^2 + \kappa) = (E_r)^2 \Rightarrow \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 h^2 + \kappa(1 - 2u GM/c^2) + h^2 u^2 - 2u^3 h^2 GM/c^2 = (E_r)^2$$

Dérivant par rapport à ϕ , on a :

$$2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2 u}{d\phi^2} h^2 - 2\kappa \frac{du}{d\phi} GM/c^2 + 2h^2 u \frac{du}{d\phi} - 6u^2 h^2 GM/c^2 \frac{du}{d\phi} = 0$$

Ou encore :

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u - 3u^2 \frac{GM}{c^2} = \kappa \frac{GM}{c^2 h^2}$$

Cette équation n'est pas autre chose que l'équation de Binet modifiée classique de la Relativité générale. Il s'ensuit que la solution pour les géodésiques calculées au moyen du paramètre R est strictement identique à celle de la métrique statique. Mais la différence va apparaître quand on va passer au calcul des coordonnées r et t.

Pour le calcul de r et t, on va utiliser les deux relations suivantes, connaissant R:

$$\frac{2ar}{1-2at} = \tanh \left\{ 2a \left(R + 2GM/c^2 \log(R - 2GM/c^2) \right) \right\} :$$

$$\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R} \right) \frac{d}{d\sigma} \log((1-2at)^2 - (2ar)^2) = -4a E_r : E_r = \frac{\text{énergie}}{mc^2}$$

Une fois r et t calculés, il faudra passer aux grandeurs réelles.

Les calculs ci-dessus se simplifient lorsqu'on traite le problème des étoiles dans une galaxie, où l'on a uniquement de très grandes valeurs pour R et r. Comme R est solution de l'équation de Binet modifiée, on sait que la solution pour de grandes valeurs de R est proche de la solution de Newton dans le système solaire, et donc a fortiori à l'échelle d'une galaxie. Si, en plus, on admet que l'excentricité de l'ellipse définie par R est faible, on va obtenir les relations suivantes, où R est considéré comme une constante :

$$h^2 = \kappa R \frac{GM/c^2}{1 - GM/c^2 R} ; (E_r)^2 = \kappa \left(1 - \frac{(GM/c^2 R)^2}{1 - GM/c^2 R} \right)$$

$$2az = \left\{ 2a \left(R + 2GM/c^2 \log(R - 2GM/c^2) \right) \right\}$$

$$\frac{2ar}{1-2at} = \tanh\{2az\} \Rightarrow 2ar = (1-2at) \tanh\{2az\}$$

$$\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R} \right) \frac{d}{d\sigma} \log((1-2at)^2 - (2ar)^2) = -4a E_r \Rightarrow (1-2at)^2 - (2ar)^2 = e^{-4a \frac{E_r \sigma}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R} \right)}}$$

$$(1-2at)^2 (1 - \tanh^2\{2az\}) = e^{-4a \frac{E_r \sigma}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R} \right)}} \Rightarrow (1-2at) = e^{-2a \frac{E_r \sigma}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R} \right)}} \cosh 2az$$

D'où la solution approximative en r et t :

$$(1-2at) = e^{-2a \frac{E_r \sigma}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R} \right)}} \cosh 2az ; 2ar = e^{-2a \frac{E_r \sigma}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R} \right)}} \sinh 2az$$

$$e^v = \frac{\cosh\{2az\}}{(1-2at)} \sqrt{1 - 2 \frac{GM}{Rc^2}} = e^{2a \frac{E_r \sigma}{\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R} \right)}} \sqrt{1 - 2 \frac{GM}{Rc^2}}$$

On obtient donc :

$$\frac{2ar}{(1-2at)} = \tanh 2az \Rightarrow 2ar = (1-2at) \tanh 2az$$

$$R^2 \frac{d\phi}{d\sigma} = h$$

On passe aux grandeurs réelles : Le temps T et la distance radiale L_r.

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{E_r}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)} e^{-2a \frac{E_r \sigma}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}} \cosh 2az; \quad \frac{dr}{d\sigma} = - \frac{E_r}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)} e^{-2a \frac{E_r \sigma}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}} \sinh 2az$$

$$c \frac{dT}{d\sigma} = e^v \frac{dt}{d\sigma} = e^{2a \frac{E_r \sigma}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}} \sqrt{1 - 2 \frac{GM}{Rc^2} \frac{E_r}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}} e^{-2a \frac{E_r \sigma}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}} \cosh 2az$$

$$\frac{dL_r}{d\sigma} = e^v \frac{dr}{d\sigma} = -e^{2a \frac{E_r \sigma}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}} \sqrt{1 - 2 \frac{GM}{Rc^2} \frac{E_r}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}} e^{-2a \frac{E_r \sigma}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}} \sinh 2az$$

D'où, pour cette approximation à R constant :

$$z = (R + 2GM/c^2 \text{Log}(R - 2GM/c^2))$$

$$h^2 = \kappa R \frac{GM/c^2}{1 - GM/c^2 R} \quad ; \quad (E_r)^2 = \kappa \left(1 - \frac{(GM/c^2 R)^2}{1 - GM/c^2 R}\right)$$

$$c \frac{dT}{d\sigma} = \frac{E_r}{\sqrt{1 - 2GM/Rc^2}} \cosh 2az \quad \text{et} : \quad \frac{dL_r}{d\sigma} = - \frac{E_r}{\sqrt{1 - 2GM/Rc^2}} \sinh 2az \quad ; \quad R^2 \frac{d\phi}{d\sigma} = h$$

$$\frac{dT}{d\sigma}, \frac{dL_r}{d\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{d\sigma} \quad \text{sont 3 constantes}$$

La particule se déplace sur une spirale d'Archimède, qui converge vers la masse centrale si a>0, ou bien diverge si a<0. En conséquence, si la métrique est dynamique, l'orbite d'une particule massive orbitant seule autour d'une masse centrale n'est pas stable ; elle converge ou diverge suivant le signe de la constante « a ». La perturbation par rapport à la métrique statique est linéaire en « a » en première approximation.

Conclusion : La solution trouvée vérifie pleinement 3 des équations de base, elle ne vérifie la 4^{ème} équation qu'au 2^{ème} ordre près. Est-ce-que cette solution peut avoir un sens physique ?