

Métrie dynamique 3D+1

Michel Canac

2 Rue Gabillot 69003

Futura Science :pseudo : Markus Bloch

mpcanac@wanadoo.fr

1/Introduction

Le but de ce document est de décrire une métrique dynamique approchée déduite de la Relativité Générale dans une géométrie dotée de symétrie centrale. Il est connu depuis la publication de la métrique de Schwarzschild qu'un champ de gravitation central symétrique dans le vide est automatiquement statique. L'intervalle ds dans cette métrique est donné par l'expression en géométrie sphérique (r, θ, ϕ) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} - r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (1.1)$$

Dans cette expression, dt est : (la différentielle du temps) $\times c$; dt est exprimé en mètres. G est la constante de gravitation universelle, et M est la masse de l'objet sphérique créant le champ de gravitation.

Cependant, nous allons montrer qu'il est possible dans cette géométrie de déterminer une métrique dynamique approchée avec une précision du premier ordre.

2/ Choix de la forme de l'intervalle

Nous choisissons la forme générale :

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

Les fonctions $\nu(t, r)$, $\lambda(t, r)$, $R(t, r)$ sont à déterminer comme solutions du système d'équations formé pour annuler le tenseur de Ricci.

3/ Le tenseur de Ricci

Les composantes du tenseur de Ricci sont obtenues sous la forme suivante:

(Les dérivées partielles par rapport à r et t sont indiquées en exposant)

$$R_{00} = \nu^t \left(\lambda^t + \frac{2}{R} R^t \right) - \left(\lambda^t \lambda^t + \lambda^{tt} + \frac{2}{R} R^{tt} \right) - e^{2\nu-2\lambda} \left((v^{rr} + v^r(v^r - \lambda^r)) + v^r \frac{2}{R} R^r \right) = 0 \quad (3.1)$$

$$R_{11} = \lambda^r \left(v^r + 2 \frac{R^r}{R} \right) - v^r v^r - \left(v^{rr} + 2 \frac{R^{rr}}{R} \right) - e^{2\lambda-2\nu} \left(\lambda^t (\lambda^t - v^t) + \lambda^{tt} + \lambda^t 2 \frac{R^t}{R} \right) = 0 \quad (3.2)$$

$$R_{22} = 1 + e^{-2\nu} \{ R^t R^t + R R^{tt} - (v^t - \lambda^t) R R^t \} - e^{-2\lambda} \{ R^{rr} R + R^r R^r + R^r R (v^r - \lambda^r) \} = 0 \quad (3.3)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta \{ 1 + e^{-2\nu} (R^{tt} R + R^t R^t + R^t R (-v^t + \lambda^t)) - e^{-2\lambda} (R^r R^r + R^{rr} R + R^r R (v^r - \lambda^r)) \} = 0 \quad (3.4)$$

$$R_{01} = R_{10} = \frac{2}{R} (-R^{tr} + v^r R^t + \lambda^t R^r) \quad (3.5)$$

$$R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0; \quad (3.6) \text{ tous les termes symétriques sont nuls}$$

R_{33} est proportionnel à R_{22}

On vérifie facilement qu'en imposant la relation $R=r$, on retrouve les équations classiques de Schwarzschild. Pour notre développement, nous imposons la relation : $\nu(t, r) = \lambda(t, r)$, ce qui conduit au système modifié ci-après :

4/ Le tenseur de Ricci avec : $\nu(t, r) = \lambda(t, r)$

$$R_{00} \times R = 2\nu^t R^t - R\nu^{tt} - 2R^{tt} - R\nu^{rr} - 2\nu^r R^r = 0 : \text{équation (A)}$$

$$R_{11} \times R = 2\nu^r R^r - R\nu^{rr} - 2R^{rr} - R\nu^{tt} - 2\nu^t R^t = 0 : \text{équation (B)}$$

$$R_{22} \times e^{2\nu} = e^{2\nu} + (R^t R^t + R R^{tt}) - (R^{rr} R + R^r R^r) = 0 : \text{équation (C)}$$

$$R_{01} \times R = -R^{tr} + \nu^r R^t + \nu^t R^r = 0 : \text{équation (D)}$$

En combinant ces équations, on obtient le système final d'équations à résoudre :

$$(R^t e^{-2\nu} - F^r)^t - (R^r e^{-2\nu} - F^t)^r = 0 \quad (4.1)$$

$$(R^2)^{rr} - (R^2)^{tt} - 2e^{2\nu} = 0 \quad (4.2)$$

$$R^{tt} + R^{rr} + R\nu^{tt} + R\nu^{rr} = 0 \quad (4.3)$$

$$-R^{tr} + \nu^r R^t + \nu^t R^r = 0 \quad (4.4)$$

$F(t, r)$ est une fonction arbitraire différentiable deux fois.

En combinant (4.1) et (4.4), on aboutit à la relation :

$$F^{tt} + F^{rr} = 0 \quad (4.5)$$

La fonction F est donc solution d'une équation de Laplace autonome, ce qui amène potentiellement une infinité de solutions, et suggère qu'on peut trouver une solution au système d'équations (bien qu'on sache a priori que, par suite de l'invariance des propriétés tensorielles, il n'y a pas de solution exacte au système d'équations).

La courbure scalaire R_s est obtenue par contraction du tenseur de Ricci. On obtient :

$$R_s = \frac{2}{R} \{ (R^t e^{-2\nu} - F^r)^t - (R^r e^{-2\nu} - F^t)^r \} - 2 \frac{e^{-2\nu}}{R^2} (e^{2\nu} + (R R^t)^t - (R R^r)^r) \quad (4.6)$$

$$R_s = \frac{2}{R} \times \text{équation}(4.1) - \frac{2e^{-2\nu}}{R^2} \times \text{équation}(4.2) \quad (4.7)$$

On remarque que la courbure scalaire peut être nulle sans que l'équation (4.3) soit vérifiée.

5/ Résolution du système d'équations

Nous utilisons la procédure suivante :

Dans un premier temps, nous traitons le sous-groupe d'équations : (4.1), (4.2), (4.4)

Dans un deuxième temps, nous traitons le sous-groupe d'équations : (4.1), (4.3), (4.4)

Finalement, nous effectuons la synthèse des deux résultats.

5.1/ Traitement du sous-groupe (4.1), (4.2), (4.4)

Le traitement de ces 3 équations conduit à introduire deux variables auxiliaires : ρ et φ définies par les relations suivantes :

$$\rho^2 = F^t F^t + F^r F^r \quad (5.1)$$

$$\tan \varphi = \frac{F^r}{F^t} \quad (5.2)$$

On aboutit à la solution suivante :

$$F = t - a_H \frac{t^2}{2} + a_H \frac{r^2}{2} \quad (5.3)$$

$$x = \left(R - R_b + (2GM/c^2) \text{Log} \left(\frac{R - 2GM/c^2}{R_b - 2GM/c^2} \right) \right) \quad (5.4)$$

$$\tan \varphi = \frac{a_H r}{1 - a_H t} = \tanh(a_H x) : \quad (5.5)$$

$$e^{2\nu} = \frac{1}{(1 - a_H t)^2 - (a_H r)^2} \left(1 - 2 \frac{GM}{Rc^2} \right) \quad (5.6)$$

$$(ou : \text{équivalent}) e^{2\nu} = \frac{1}{\rho^2 \cos 2\varphi} \left(1 - 2 \frac{GM}{Rc^2} \right) \quad (5.7)$$

Les relations (5.4) et (5.5) définissent implicitement la fonction $R(t, r)$

La métrique est donc définie complètement ; il y a une seule solution. Deux constantes apparaissent dans la solution :

a_H est une constante cosmologique caractérisant le côté dynamique de la métrique.

R_b est une constante d'intégration définissant la valeur de R à partir de laquelle la métrique dynamique s'applique.

5.2/ Traitement du sous-groupe (4.1),(4.3),(4.4)

Ce sous-groupe permet de calculer

$$e^{2\nu} = \frac{1}{\rho^2} \left(1 - 2 \frac{GM}{Rc^2} \right) \quad (5.8)$$

Dans ce cas, la fonction F reste indéterminée. La formule (5.8) diffère de (5.7), ce qui montre que les résultats ne peuvent être identiques aux résultats précédents.

L'équation (4.3) se comporte donc de manière différente de l'équation (4.2) dans la résolution, et ne fournit pas de solution complète. Nous allons injecter le résultat du §5.1 dans l'équation (4.3) pour obtenir le résidu de cette équation. Nous obtenons :

$$\text{résidu} = R^{tt} + R^{rr} + Rv^{tt} + Rv^{rr} \approx 6r(a_H)^2 \quad (5.9)$$

Le résidu est quadratique en a_H , ce qui amène la conclusion suivante : La métrique est définie à l'ordre 1 de précision par rapport à a_H qui est supposée être une petite grandeur perturbatrice. De plus, la courbure scalaire est strictement nulle.

En conséquence, cette métrique approximative n'est pas seulement une curiosité mathématique, elle est susceptible d'avoir un sens physique. Ce point va être développé dans l'analyse des géodésiques.

6/ Calcul des géodésiques

On obtient les résultats suivants :

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (6.1)$$

$$\frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{h}{R^2} \quad (6.2)$$

$$\left(\frac{dR}{d\sigma}\right)^2 + \left(1 - 2\frac{GM}{Rc^2}\right)\left(\left(\frac{C^2}{R^2}\right) + \kappa\right) = (E_r)^2 \quad (6.3)$$

$$\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R}\right)\frac{d}{d\sigma} \text{Log}((1 - a_H t)^2 - (a_H r)^2) = -2a_H E_r \quad (6.4)$$

(6.1) montre que le mouvement a lieu dans un plan, arbitrairement choisi pour simplifier les calculs par $\theta = \frac{\pi}{2}$ (choix classique).

h est une constante d'intégration, c'est le moment cinétique.

$\kappa = 1$ pour les particules massives, et $\kappa = 0$ pour les particules sans masse:

σ est le temps propre de la particule.

E_r est l'énergie de la particule. En passant à la limite du cas statique : ($a_H \rightarrow 0$), la relation (6.4) : devient :

$$\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R}\right)\frac{dt}{d\sigma} = E_r \quad (6.5)$$

Le groupe de relations (6.1),(6.2),(6.3),(6.5) est strictement identique aux relations obtenues avec la métrique statique. On constate que, seule la relation (6.4) est différente en métrique dynamique. On obtient donc un résultat remarquable : le calcul des trajectoires des particules en utilisant la fonction R est strictement identique au calcul fait en métrique statique. En particulier, on obtient l'équation traditionnelle de type équation de Binet :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3u^2 GM/c^2 = 0 \quad (u = 1/R) \quad (6.6)$$

On peut donc mener tous les calculs classiques de trajectoires des particules en utilisant les formules connues de la métrique statique pour le calcul de R ((6.2) et (6.3))

En revanche, le calcul des coordonnées r et t va notablement différer du cas statique. Ce calcul doit être effectué en utilisant les relations obtenues rappelées ci-après :

$$\frac{a_H r}{1 - a_H t} = \tanh(a_H x) : x = \left(R - R_b + (2GM/c^2)\text{Log}\left(\frac{R - 2GM/c^2}{R_b - 2GM/c^2}\right)\right)$$

$$\left(1 - \frac{2GM/c^2}{R}\right)\frac{d}{d\sigma} \text{Log}((1 - a_H t)^2 - (a_H r)^2) = -2a_H E_r \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{C}{R^2}$$

7/ Géodésiques des particules massives

Considérons le mouvement d'un corps dans le champ de gravitation défini par la métrique dynamique. On calcule d'abord le mouvement en coordonnées θ, ϕ, R . Le mouvement a lieu dans le plan : $\theta = \pi/2$; la trajectoire est approximativement une

ellipse dont le périhélie se déplace systématiquement à chaque rotation d'un angle $\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)}$ où a est le demi-grand axe de l'ellipse, et e est l'excentricité. Nous allons traiter le cas des étoiles orbitant dans une galaxie en supposant que la trajectoire est approximativement un cercle. Nous allons admettre que R est une constante. Nous obtenons alors les résultats suivants (avec : $\kappa = 1$)

$$h^2 = \kappa R \frac{GM/c^2}{1 - GM/c^2 R} ; (E_r)^2 = \kappa \left(1 - \frac{(GM/c^2 R)^2}{1 - GM/c^2 R} \right) \quad (7.1)$$

Nous définissons le temps réel T , la distance radiale réelle L_r et la distance réelle L par les formules :

$$c \frac{dT}{d\sigma} = e^v \frac{dt}{d\sigma} ; \frac{dL_r}{d\sigma} = e^v \frac{dr}{d\sigma} ; \left(\frac{dL}{d\sigma} \right)^2 = e^{2v} \left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + R^2 d\phi^2 \quad (7.2)$$

$$x = (R + 2GM/c^2 \text{Log}(R - 2GM/c^2)) \quad (7.3)$$

$$c \frac{dT}{d\sigma} = \frac{E_r}{\sqrt{1 - 2GM/Rc^2}} \cosh a_H x \quad \text{et} : \quad \frac{dL_r}{d\sigma} = - \frac{E_r}{\sqrt{1 - 2GM/Rc^2}} \sinh a_H x \quad (7.4)$$

Les dérivées $\frac{dT}{d\sigma}$, $\frac{dL_r}{d\sigma}$ et $\frac{d\phi}{d\sigma}$ sont donc 3 constantes

$$\frac{dL_r}{cdT} = - \tanh a_H x \sim - \tanh a_H R \quad (7.5)$$

La particule se déplace sur une spirale d'Archimède, qui converge vers la masse centrale si $a_H > 0$, ou bien diverge si $a_H < 0$. En conséquence, si la métrique est dynamique, l'orbite d'une particule massive orbitant seule autour d'une masse centrale converge ou diverge suivant le signe de la constante a_H . La perturbation par rapport à la métrique statique est linéaire en a_H en première approximation, ce qui donne une certaine crédibilité à la solution, puisque la seule équation non vérifiée a un résidu quadratique en a_H .

La métrique dynamique décrit donc un espace en expansion si $a_H < 0$, et en contraction si $a_H > 0$; d'après (7.5) la vitesse radiale de déplacement est proportionnelle à R en première approximation, ce qui signifie qu'elle ne change pas dans le temps, puisque R est une constante dans notre approximation. On constate que cette vitesse ne peut pas atteindre la vitesse de la lumière.

La vitesse de l'étoile est obtenue par la formule :

$$\left(\frac{dL}{cdT} \right)^2 = \tanh^2 a_H x + (1 - \tanh^2 a_H x) \frac{(GM/Rc^2)}{1 - GM/Rc^2 - (GM/Rc^2)^2}$$

Par conséquent, la vitesse dL/dT reste constante lorsque l'étoile décrit la spirale. Si on a l'inégalité : $|a_H|x \sim |a_H|R \ll 1$, alors : $(dL/dT)^2 \approx GM/R$, ce qui correspond à la formule de Newton. Dans ce cas, la vitesse orbitale de l'étoile suit en permanence la loi de Newton, mais la distance utilisée dans la formule est la distance à laquelle se situait l'étoile au début de sa migration, c'est-à-dire au moment où la métrique est devenue dynamique, et non la distance réelle à laquelle elle est parvenue au temps T . Dans une métrique avec $a_H < 0$, l'espace est en expansion, et l'on doit observer dans la galaxie,

dans la zone externe du cœur, des étoiles avec une vitesse orbitale supérieure à la vitesse calculée par la formule de Newton dans laquelle on injecte la distance observée.

8/ Stabilité de la métrique dynamique

La métrique peut évoluer au cours du temps, cette évolution étant peut-être liée à un caractère potentiellement instable, puisque l'une des équations n'est vérifiée qu'au premier ordre. Si la constante a_H s'annule au bout d'un certain temps, l'expansion de la galaxie va s'arrêter ; elle peut ensuite évoluer de diverses manières, suivant que la constante a_H redevienne négative, ou devienne positive, ou reste nulle. Il est aussi vraisemblable qu'il est nécessaire que certaines conditions soient remplies pour que la métrique dynamique s'amorce ; la masse du cœur, son étendue dans les temps primitifs de l'évolution de l'Univers jouent certainement un rôle dans l'amorçage du processus.

8/ Interactions entre galaxies dans un amas

Le mécanisme de migration décrit dans 7/ peut s'appliquer au mouvement des galaxies en interaction gravitationnelle dans un amas. A une époque primitive où un amas serait un objet sphéroïdal unique, on peut imaginer que sa métrique devienne dynamique en expansion, et se combine avec l'expansion globale de l'Univers. L'objet unique pourrait alors se disloquer en galaxies différenciées qui commencent à migrer vers l'extérieur de la localisation initiale de l'objet sphéroïdal.

Ensuite, l'évolution de chaque galaxie peut aussi évoluer avec une métrique dynamique, phénomène qui aurait tendance à créer beaucoup de galaxies spirales, compte tenu du mouvement de migration en spirale d'Archimède des étoiles. Cependant, si certaines conditions doivent être remplies pour que la métrique dynamique s'amorce, alors il a pu exister des galaxies qui restent entièrement régies par la loi de Newton, même sur leur bord externe.

9/ Implications dans le problème de la matière noire

Les résultats obtenus ci-avant permettent d'imaginer un scénario expliquant les vitesses anormalement élevées des étoiles périphériques dans une galaxie par une évolution antérieure à une époque au cours de laquelle la métrique de la galaxie était dynamique. De même, les vitesses relatives anormalement élevées des galaxies dans beaucoup d'amas pourraient trouver une explication dans l'implication d'une métrique dynamique dans des temps anciens.

10/ Géodésiques des photons (En développement)

