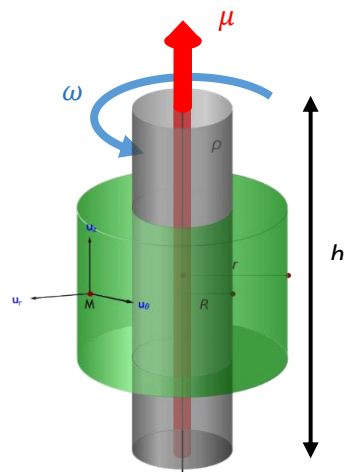
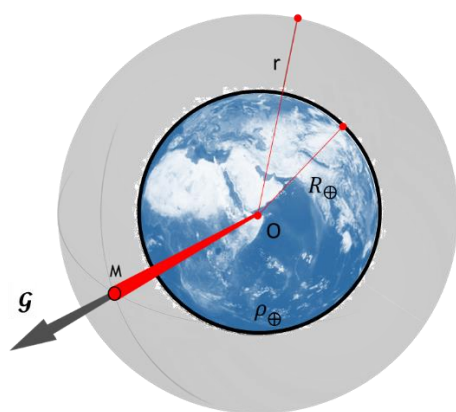


# ANALOGIE ELECTROMAGNETIQUE GRAVITOCINETIQUE

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

ETUDES DES SIMILARITES PHYSIQUES ET COMPORTEMENTALES ENTRE MOMENT CINETIQUE ET  
MAGNETIQUE

Calcul et comparaison pour des géométries simples



**I. Introduction :**

L'objectif de cette réflexion est de mettre en avant, les fortes similarités présentes entre les interactions gravitationnelles et électromagnétiques

## II. Calcul du champ électrique $\vec{E}$ et gravitationnel $\vec{g}$ généré par une boule chargée en volume

De par la similitude entre l'interaction électrostatique et l'interaction gravitationnelle

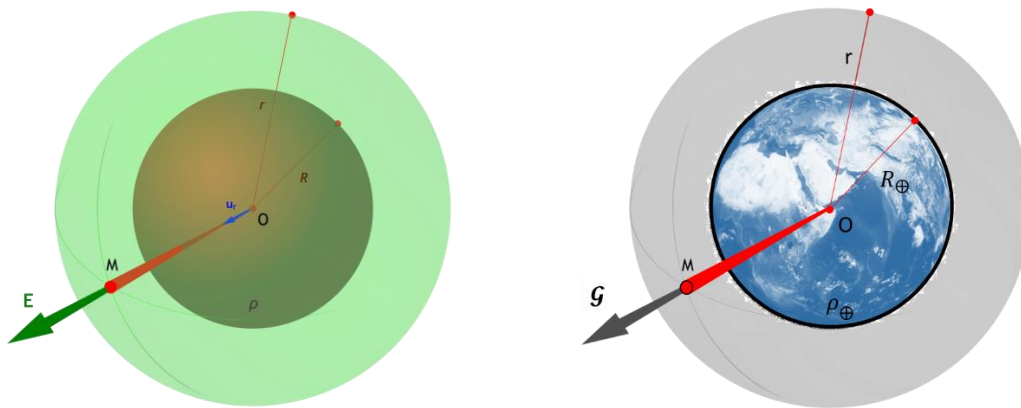
$$\overrightarrow{F_{\text{electrostatique}}} = K_c \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} \Rightarrow \overrightarrow{F_{\text{gravitationnelle}}} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

On pourrait imaginer de la même manière que la particule chargée électriquement, la particule chargée massiquement dans un champ gravitationnel subit une force gravitostatique :

$$\overrightarrow{F_{\text{electrostatique}}} = q \cdot \vec{E} \leftrightarrow \overrightarrow{F_{\text{gravitostatique}}} = m \cdot \vec{g}$$

Comparons maintenant la terre à une boule chargée en volume :

De la même manière qu'une boule pleine de particules chargées électriquement dont nous souhaiterions obtenir le champ électrique à la surface de celle-ci on calculera le champ gravitationnel d'une boule chargée massiquement :



$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \text{ si } r \geq R \leftrightarrow \vec{g}(r) = \frac{M}{4\pi g_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3g_0 r^2}$$

Ce qui implique une permittivité gravitationnelle  $g_0$  qui peut être calculé de la même manière que l'on calculerait la permittivité électrique à partir de la constante de Coulomb :

$$K_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} ; \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi K_c} \leftrightarrow \text{par analogie } g_0 = \frac{1}{4\pi G} = 1.1926 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^3$$

Application numérique pour la terre :

$$M_{\oplus} = (5,9722 \pm 0,0006 \times 10^{24}) \text{ kg}$$

$$R_{\oplus} = (6,3710 \times 10^6) \text{ m}$$

a. Calculons la densité massique volumique moyenne de la terre  $\rho_{\oplus}$  :

$$\rho_{\oplus} = \frac{M_{\oplus}}{\frac{4}{3}\pi R_{\oplus}^3} = 5,5134 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

(Newton l'imaginait entre 5 et 6 fois celle de l'eau «  $1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  »)

- b. Calculons toujours par analogie la valeur du champ gravitationnel au rayon de la terre  $\mathcal{G}(R_{\oplus})$ :

Donc  $r = R_{\oplus}$

$$\mathcal{G}(R_{\oplus}) = \frac{\rho_{\oplus} R_{\oplus}^3}{3g_0 R_{\oplus}^2} \approx 9,82 \text{ m/s}^2$$

Marrant non ....

### III. Calcul du champ électrique $\vec{E}$ et gravitationnel $\vec{g}$ généré par un cylindre chargé en volume

Considérons la géométrie simple d'un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  et de charge volumique électrique  $\rho_e$  générant donc autour de lui un champ électrique  $\vec{E}$ .

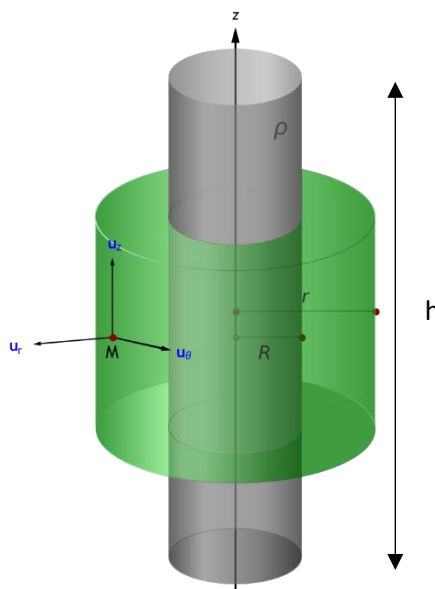


Figure 2. Champ électrique généré par un cylindre plein chargé électriquement

On applique le théorème de Gauss à une surface à symétrie cylindrique  $\Sigma$

$$\oint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{int} = V \cdot \rho_e = \pi R^2 h \rho$$

Comme  $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ , le flux de  $\vec{E}$  à travers les bases de  $\Sigma$  est nul. Il reste

$$\oint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = E(r) \oint_{\Sigma} \vec{u}_r \cdot d\vec{S} = E(r) 2\pi r h$$

Donc

$$\begin{cases} E(r) = \frac{\rho_e R^2}{2\varepsilon_0 r} \text{ si } r \geq R \\ E(r) = \frac{\rho_e r}{2\varepsilon_0} \text{ si } r \leq R \end{cases}$$

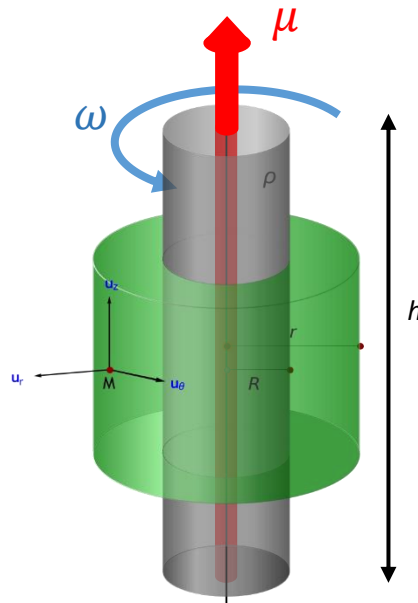
IV. Calcul du potentielle électrique  $V(r)$  sur le rayon par un cylindre chargé électriquement en volume :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r \text{ donc } dV = -E(r)dr$$

$$\begin{cases} V(r) = \frac{-\rho_e R^2}{2\varepsilon_0} \ln(r) \text{ si } r \geq R \\ V(r) = -\frac{\rho_e r^2}{4\varepsilon_0} \text{ si } r \leq R \end{cases}$$

V. Calcul du moment magnétique généré par la mise en rotation  $\omega$  du cylindre

Considérons le même cylindre que précédemment mais, mis en rotation  $\omega$  autour de son axe de révolution z.



- a. On rappelle la charge électrique totale Q du cylindre :

$$Q_{int} = \pi R^2 h \rho_e$$

- b. Calcul de courant électrique issu I de sa rotation autour de son axe de symétrie :

$$I_e = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{T} \text{ avec ; } \omega = \frac{2\pi}{T} ; I = \frac{Q\omega}{2\pi}$$

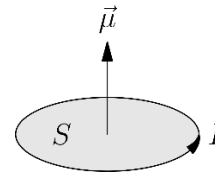
Ou dans le cas ou N en tr/s indique la vitesse de rotation du cylindre,

$$I_e = Q \cdot N$$

c. Calcul du moment magnétique  $\mu$  :

$$\mu = I_e \cdot S$$

$$\mu = \frac{\pi R^2 h \rho_e \omega}{2\pi} \cdot S$$



Considérons désormais une seule boucle de courant équivalente mais contenue dans la géométrie

$$\mu = \frac{\pi R^2 h \rho_e \omega}{2\pi} \cdot \pi \cdot R^2$$

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot \pi R^4 h \rho_e \cdot \omega$$

$$\mu = J_e \cdot \omega$$

Le moment magnétique rappelle l'équation du moment cinétique appliqué à un cylindre en rotation. Nous pourrions également calculer le moment magnétique de la manière suivante.

$$\mu = Q \cdot N \cdot \pi \cdot R^2$$

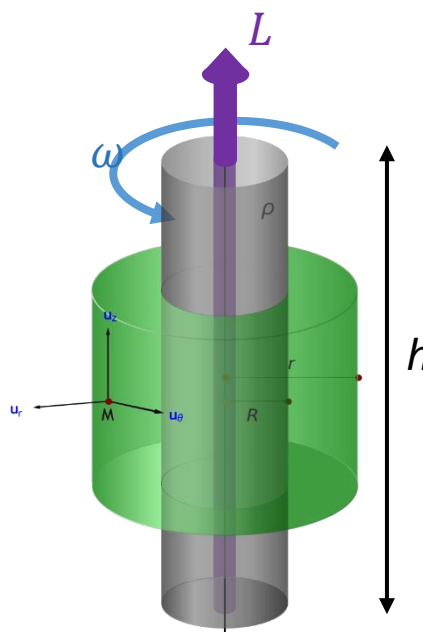
*Interrogation diverses :*

Etant donnée la forme du résultat, on pourrait imaginer la présence d'une inertie électrique analogue aux phénomènes d'inertie mécanique, sachant que la dimension du moment magnétique serait  $\left[\frac{I \cdot L^2}{\theta}\right]$

on pourrais suggérer la dimension de  $J_{\Delta e} = \left[\frac{I \cdot L^2 \cdot T}{\theta^2}\right]$ .

## VI. Calcul du moment cinétique d'un cylindre en rotation sur son axe de symétrie

Considérons le même cylindre, mis en rotation autour de son axe de révolution, axe que l'on nommera  $\Delta$ . Ce cylindre possède une masse  $M$  et une densité  $\rho_m$ . Avec le même raisonnement qu'avec les charges électriques imaginons un champ gravitationnel  $\vec{G}$  créé par des charges massiques.



On pourrait donc aussi à l'inverse poser l'hypothèse que, le moment cinétique d'un corps, est le résultat de la mise en rotation des charges massiques qui le compose.

On applique le théorème de Gauss à une surface à symétrie cylindrique  $\Sigma$

$$\oint_{\Sigma} \vec{G}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{M_{int}}{g_0}$$

$$M_{int} = V \cdot \rho_m = \pi R^2 h \rho_m$$

Comme  $\vec{G} = G(r)\vec{u}_r$ , le flux de  $\vec{G}$  à travers les bases de  $\Sigma$  est nul. Il reste

$$\oint_{\Sigma} \vec{G}(M) \cdot \vec{dS} = G(r) \oint_{\Sigma} \vec{u}_r \cdot \vec{dS} = G(r) 2\pi r h$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} G(r) = \frac{\rho_m R^2}{2g_0 r} \text{ si } r \geq R \\ G(r) = \frac{\rho_m r}{2g_0} \text{ si } r < R \end{array} \right\}$$

## VII. Calcul du potentielle gravitationnel $\Phi(r)$ sur le rayon par un cylindre chargé massiquement en volume :

$$\vec{G} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{d\Phi}{dr}\vec{u}_r \text{ Donc } dV = -G(r)dr$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(r) = -\frac{\rho_m R^2}{2g_0} \ln(r) \text{ si } r \geq R \\ \Phi(r) = -\frac{\rho_m r^2}{4g_0} \text{ si } r < R \end{array} \right\}$$

a. On rappelle la charge massique totale M du cylindre

$$M_{int} = \pi R^2 h \rho_m = V \cdot \rho_m$$

b. Calcul de courant massique issu  $I_g$  de sa rotation autour de son axe de symétrie :

$$I_g = \frac{dM}{dt} = \frac{M}{T} \text{ avec ; } \omega = \frac{2\pi}{T}; I_g = \frac{M\omega}{2\pi}$$

Ou encore avec N en tr/s  $I_g = M \cdot N$

Désormais on définit une nouvelle unité de courant massique le kg/s

c. Calcul du moment cinétique  $L$  :

On peut déterminer le moment d'inertie massique, d'un cylindre plein en rotation autour de son axe de rotation (ici  $z$ ) de la manière suivante :

Le moment d'inertie  $I_{\Delta}$  par rapport à un axe  $\Delta$  d'un point matériel de masse  $m$  située à une distance  $r$  de  $\Delta$  :

$$J_{\Delta g} = mr^2$$

Un système de  $N$  points matériels de masses  $m_i$  distants de  $r_i$  de l'axe  $\Delta$  aura pour moment d'inertie par rapport à  $\Delta$  :

$$J_{\Delta g} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

Dans le cas d'un corps solide constitué d'une infinité de points matériels, nous passerons à la limite suivante :

$$J_{\Delta g} = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R 2\pi R^3 h \rho_m dr$$

$$J_{\Delta g} = \frac{1}{2} R^4 h \rho_m$$

$$J_{\Delta g} = \frac{1}{2} MR^2$$

On calcule désormais le moment cinétique dû à la rotation du cylindre :

$$L = J_{\Delta g} \cdot \omega$$

$$L = \frac{1}{2} R^4 h \rho_m \cdot \omega$$

### VIII. Interrogation diverses :

On observant les similitudes présentes entre moment cinétique et moment magnétique on peut raisonner de manière analogue et introduire un courant massique  $I_g \rightarrow \left[ \frac{kg}{s} \right] \rightarrow \left[ \frac{M}{T} \right]$ .

Définir une charge massique élémentaire  $m^+$  en kg

Une permittivité gravitationnelle  $g_0$ , une perméabilité temporelle  $t_0$  Avec potentiellement  $t_0 = \frac{1}{g_0 c^2}$

Eventuellement une Induction gravito-temporelle

Une force de Lorentz gravitationnelle :

$$\vec{F}_{lg} = m\vec{G} + m\vec{v} \wedge \vec{T}$$

Existence d'un lien entre le moment cinétique et le moment magnétique

$$\vec{\mu} = \frac{Q}{2M} \vec{L}$$



## IX. Calcul du moment cinétique dû à la rotation de la terre sur son axe :

$$\overrightarrow{L}_{\oplus} = J_{\Delta\oplus} \cdot \overrightarrow{\omega}_{\oplus}$$

$$J_{\Delta\oplus} = \frac{2}{5} M_{\oplus} R_{\oplus}^2 \text{ où } M = \frac{4}{3} \pi R_{\oplus}^3 \rho_{\oplus}$$

$$\overrightarrow{L}_{\oplus} = \frac{2}{5} M_{\oplus} R_{\oplus}^2 \cdot \overrightarrow{\omega}_{\oplus}$$

$$\omega_{\oplus} = 7.2921 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$M_{\oplus} = (5,9722 \pm 0,0006 \times 10^{24}) \text{ kg}$$

$$R_{\oplus} = (6,3710 \times 10^6) \text{ m}$$

$$\overrightarrow{L}_{\oplus} = 7.0766 \times 10^{24} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s} \cdot \text{rad}}$$