

1 La métrique de Lemaître-Tolman-Bondi

La métrique de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) décrit la géométrie d'un espace-temps rempli d'un fluide parfait sans pression, dont la densité d'énergie présente à tout époque une symétrie sphérique mais n'est pas nécessairement homogène radialement. En choisissant un système de coordonnées comobiles dont l'origine est le centre de symétrie on peut écrire cette métrique sous la forme

$$ds^2 = -dt^2 + B(R,t)^2 dR^2 + A(R,t)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1)$$

où on a choisi un système d'unités dans lequel $c = 1$, et on nomme la coordonnée radiale R pour ne pas la confondre avec le r de métrique FLRW. R est un nombre sans dimension et A et B ont la dimension d'une longueur.

On se limite à un modèle d'espace-temps dans lequel $\Lambda = 0$. L'équation d'Einstein pour la métrique LTB conduit alors aux équations¹

$$B^2(R,t) = \frac{A'^2(R,t)}{1 + 2E(R)} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}\dot{A}^2(R,t) - \frac{GM(R)}{A(R,t)} = E(R) \quad (3)$$

$$\frac{M'(R)}{A'(R,t)A^2(R,t)} = 4\pi\rho(R,t) \quad (4)$$

$$\frac{\dot{A}^2(R,t) - 2E(R)}{A^2(R,t)} + \frac{2\dot{A}'(R,t)\dot{A}(R,t) - 2E'(R)}{A'(R,t)A(R,t)} = 8\pi G\rho(R,t) \quad (5)$$

où $E(R)$ et $M(R)$ sont des fonctions arbitraires de R . $E(R)$ peut être interprétée comme l'énergie totale par unité de masse d'une particule comobile et $M(R)$ comme la masse² de matière à l'intérieur de la sphère de coordonnée radiale comobile R .

La solution avec courbure spatiale positive ($E(R) < 0$) s'exprime à l'aide d'un paramètre sans dimension $\eta(R,t)$ tel que :

$$A(R,t) = \frac{GM(R)}{-2E(R)} (1 - \cos \eta(R,t)) \quad (6)$$

$$t - t_B(R) = \frac{GM(R)}{[-2E(R)]^{3/2}} (\eta(R,t) - \sin \eta(R,t)) \quad (7)$$

La solution avec courbure spatiale négative ($E(R) > 0$) s'exprime à l'aide d'un paramètre sans dimension $\eta(R,t)$ tel que :

$$A(R,t) = \frac{GM(R)}{2E(R)} (\cosh \eta(R,t) - 1) \quad (8)$$

$$t - t_B(R) = \frac{GM(R)}{[2E(R)]^{3/2}} (\sinh \eta(R,t) - \eta(R,t)) \quad (9)$$

La solution avec courbure spatiale nulle, qui ne sera pas utilisée dans ce document, est :

$$A(R,t) = \left(\frac{M(R)}{2} [t - t_B(R)]^2 \right)^{1/3} \quad (10)$$

1. Remarque : les quatre équations ne sont pas indépendantes, l'équation (5) pouvant être par exemple déduite des équations (3) et (4).

2. L'élément de volume comobile étant $dV = BA^2 dR d\theta d\phi$, on pourrait être surpris de voir apparaître $A'A^2$ au lieu de BA^2 dans l'équation (4) reliant M' à ρ . Mais, la fonction E étant indépendante de t ,

$$\rho(R,t) = \rho(R,t_0) \frac{dV(R,t_0)}{dV(R,t)} = \rho(R,t_0) \frac{A^2(R,t_0) \frac{A'(R,t_0)}{\sqrt{1+E(R)}}}{A^2(R,t) \frac{A'(R)}{\sqrt{1+E(R)}}} = \rho(R,t_0) \frac{A^2(R,t_0) A'(R,t_0)}{A^2(R,t) A'(R)}$$

2 Modélisation d'une zone de sous-densité

2.1 Résultats généraux

La zone de sous-densité est décrite par la métrique LTB avec courbure spatiale négative ($E(R) > 0$) pour $R < 1$.

On choisit $t_B(R) \equiv t_B$, constante. Pour simplifier l'écriture des équations on prend cette constante égale à 0 pour le moment. Mais comme $t'_B \equiv 0$ il sera toujours possible de remplacer t par $t - t_B$ dans les résultats faisant intervenir explicitement t .

$$A = \frac{GM}{2E} (\cosh \eta - 1) \quad (11)$$

$$t = \frac{GM}{[2E]^{3/2}} (\sinh \eta - \eta) \quad (12)$$

En dérivant l'équation (12) puis l'équation (11) par rapport à R on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{GM'}{[2E]^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{GM[2E]'}{[2E]^{5/2}} \right) (\sinh \eta - \eta) + \frac{GM}{[2E]^{3/2}} (\cosh \eta - 1) \eta' \\ 0 &= \left(\frac{M'}{M} - \frac{3E'}{2E} \right) (\sinh \eta - \eta) + (\cosh \eta - 1) \eta' \\ \eta' &= \left(\frac{3E'}{2E} - \frac{M'}{M} \right) \frac{(\sinh \eta - \eta)}{(\cosh \eta - 1)} \\ A' &= \left[\frac{GM'}{2E} - \frac{GME'}{2E^2} \right] (\cosh \eta - 1) + \frac{GM}{2E} \eta' \sinh \eta \\ A' &= A \left[\frac{M'}{M} - \frac{E'}{E} + \left(\frac{3E'}{2E} - \frac{M'}{M} \right) \frac{(\sinh \eta - \eta) \sinh \eta}{(\cosh \eta - 1)^2} \right] \end{aligned}$$

Et en dérivant l'équation (12) puis l'équation (11) par rapport à t on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{[2E]^{3/2}}{GM(\cosh \eta - 1)} = t^{-1} \frac{(\sinh \eta - \eta)}{(\cosh \eta - 1)} \\ \dot{A} &= \frac{GM}{2E} \dot{\eta} \sinh \eta = \frac{GM}{2E} t^{-1} \frac{(\sinh \eta - \eta) \sinh \eta}{(\cosh \eta - 1)} = \sqrt{2E} \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - 1} \\ \frac{\dot{A}}{A} &= t^{-1} \frac{(\sinh \eta - \eta) \sinh \eta}{(\cosh \eta - 1)^2} \end{aligned}$$

2.2 Conditions aux limites

- Dans notre modèle d'univers non homogène, les zones de sous- et sur- densité évoluent selon la métrique LTB à partir d'un espace-temps quasi-homogène, pouvant être décrit en bonne approximation jusqu'à une date t_i par le modèle d'Einstein-de Sitter (EdS). La masse M de la sphère de rayon R en coordonnées comobiles étant conservée, il en est de même de M' . En l'absence de courbure spatiale, le facteur d'échelle a de la métrique FLRW est arbitraire. On le choisit ici tel que $a(t_i)r = A(R, t_i)$ pour des coordonnées r et R correspondant à la même distance radiale "physique" en t_i , et en nommant r_D le rayon initial de la zone

concernée en coordonnées FLRW, on obtient $r = r_D R$, et :

$$M(R) \simeq \frac{4\pi}{3} a^3(t_i) r^3 \rho_M(t_i) = \frac{4\pi}{3} a^3(t_i) r_D^3 R^3 \rho_M(t_i) = M(1) R^3$$

$$\frac{M'}{M} \simeq \frac{3}{R}$$

- On considère que la zone sphérique de sous-densité est entourée d'une région dans laquelle la densité est homogène, égale à ρ_M , et la courbure spatiale nulle. Cette région est décrite par la métrique FLRW avec $k = 0$, $\Lambda = 0$. C'est donc encore la solution EdS qui s'y applique. L'équation de Friedmann conduit à $a(t) \propto t^{2/3}$ et $H(t) = \frac{2}{3} t^{-1}$.

$$\text{Or } E \xrightarrow{R \rightarrow 1} 0 \Rightarrow A \frac{2E}{GM} \xrightarrow{R \rightarrow 1} 0 \Rightarrow \cosh \eta \xrightarrow{R \rightarrow 1} 1 \Rightarrow \eta \xrightarrow{R \rightarrow 1} 0 \text{ pour tout } t.$$

$$\text{Pour } \eta \ll 1, \sinh \eta \sim \eta, \sinh \eta - \eta \sim \frac{\eta^3}{6}, \cosh \eta - 1 \sim \frac{\eta^2}{2}.$$

$$\text{Donc pour tout } t, \frac{(\sinh \eta - \eta) \sinh \eta}{(\cosh \eta - 1)^2} \xrightarrow{R \rightarrow 1} \frac{2}{3} \text{ et } \frac{\dot{A}}{A} \xrightarrow{R \rightarrow 1} H$$

$$\text{D'autre part } A' \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} A \left(\frac{M'}{M} - \frac{2}{3} \frac{M'}{M} \right) = \frac{A}{R}.$$

$$\text{Donc pour tout } t, A' \xrightarrow{R \rightarrow 1} \frac{A}{R} \text{ et } A(R, t) \xrightarrow{R \rightarrow 1} a(t) r_D R.$$

- A ces conditions il faut ajouter une contrainte sur la fonction E représentant la courbure spatiale. Pour qu'un modèle d'espace-temps de sections spatiales plates empli d'un fluide homogène soit une bonne approximation jusqu'à t_i , il faut que

$$\forall R, E(R) \lll \frac{GM(1)R^3}{a(t_i)r_D R} = \frac{GM(1)R^2}{a(t_i)r_D}$$

2.3 Forme de la solution

De manière générale, on peut poser

$$E = \frac{1}{2} R^2 f(R)^2 \quad E' = R f(R) [f(R) + R f'(R)] \quad \frac{E'}{E} = \frac{2[f(R) + R f'(R)]}{R f(R)}$$

avec une fonction $f(R) \geq 0$, continue et dérivable sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = \varepsilon$, $f(1) = 0$ et $f'(R) < 0$ pour tout $R < 1$.

E' s'annule en 0 et en 1, mais nécessairement aussi en un point R_0 où $f(R_0) + R_0 f'(R_0) = 0$ et où E présente un maximum.

On obtient³

$$\begin{aligned}
K &= \frac{GM(R)}{c^3 R^3} = \frac{GM(1)}{c^3}, \text{ constante} \\
t &= \frac{K}{f(R)^3} (\sinh \eta - \eta) \\
A &= \frac{cKR}{f(R)^2} (\cosh \eta - 1) = ctRf(R) \frac{\cosh \eta - 1}{\sinh \eta - \eta} \\
\dot{A} &= cRf(R) \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - 1} \\
\eta' &= \frac{3f'(R)}{f(R)} \frac{\sinh \eta - \eta}{\cosh \eta - 1} \\
A' &= A \left[\frac{1}{R} - \frac{2f'(R)}{f(R)} + \frac{3f'(R)}{f(R)} \frac{(\sinh \eta - \eta) \sinh \eta}{(\cosh \eta - 1)^2} \right] \\
&= \frac{A}{Rf(R)} \left[f(R) + Rf'(R) \left(3 \frac{(\sinh \eta - \eta) \sinh \eta}{(\cosh \eta - 1)^2} - 2 \right) \right]
\end{aligned}$$

2.4 Analyse qualitative

Pour tout t , quand R tend vers 0 ou quand R tend vers 1, $\sinh \eta - \eta$ tend vers 0, et pour R assez proche de 0 ou de 1, on peut faire les approximations

$$\begin{aligned}
\sinh \eta &\sim \eta + \frac{\eta^3}{6} & \cosh \eta &\sim 1 + \frac{\eta^2}{2} & \frac{\cosh \eta - 1}{\sinh \eta - \eta} &\sim \frac{3}{\eta} \sim 3 \left(\frac{K}{6tf^3(R)} \right)^{1/3} \\
A &\sim c \left(\frac{9}{2} K \right)^{1/3} t^{2/3} R & \Rightarrow \frac{\dot{A}}{A} &\sim \frac{2}{3} t^{-1} & \text{et } A' &\sim c \left(\frac{9}{2} K \right)^{1/3} t^{2/3}
\end{aligned}$$

Lorsque t est assez grand pour que $\exp \eta(R_0, t) \gg 2\eta(R_0, t)$, on peut faire les approximations $\sinh \eta - \eta \sim \sinh \eta \sim \cosh \eta \sim \frac{\exp \eta}{2}$, et

$$A(R_0, t) \sim ctR_0f(R_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{A}}{A} \sim t^{-1} \quad \text{et } A'(R_0, t) \sim ct[f(R_0) + R_0f'(R_0)] = 0$$

Le modèle présente donc une singularité en R_0 , puisque M' y est non nul, ce qui conduit à une densité de matière $\rho(R_0, t)$ infinie. D'autre part on a vu que pour tout t , lorsque R tend vers 1, A' converge vers $\frac{A}{R}$, et redevient donc positive. Il existe donc une autre valeur de R pour laquelle A' s'annule, et donc une autre singularité, d'autant plus proche de la limite $R = 1$ que le domaine de validité de l'approximation ci-dessus est étendu.

2.5 Question du "shell-crossing"

Il ne faut cependant pas oublier que le fait que la singularité se situe exactement en R_0 résulte d'une approximation. En fait sa coordonnée radiale $R_S(t)$ est une fonction strictement décroissante de t , et elle ne fait donc que tendre vers R_0 lorsque η tend vers l'infini.

En effet, de manière générale, $R_S(t)$ est solution de l'équation suivante

$$0 = f(R) + Rf'(R) \left[3 \frac{(\sinh \eta - \eta) \sinh \eta}{(\cosh \eta - 1)^2} - 2 \right] = f(R) + Rf'(R)h(\eta)$$

où $h(\eta(R, t))$ a les propriétés suivantes :

$$h(0) = 0 \quad h \xrightarrow{\eta \rightarrow +\infty} 1 \quad \forall \eta > 0, \frac{dh}{d\eta} > 0 \quad \Rightarrow \forall R < 1, h'(\eta) < 0 \quad \forall t > 0, \dot{h}(\eta) > 0$$

3. On réintroduit explicitement la constante c en vue de l'application numérique qui suit

Alors, en notant $R_S = R_S(t)$ et en dérivant A' par rapport à t ,

$$\begin{aligned}\dot{A}'(R_S, t) &= \frac{\dot{A}}{R_S f(R_S)} [f(R_S) + R_S f'(R_S) h(\eta)] + \frac{A(R_S, t)}{f(R_S)} f'(R_S) \dot{h}(\eta) < 0 \\ \Rightarrow A'(R_S, t + dt) &= \underline{A'(R_S, t)} + \dot{A}'(R_S, t) dt < 0\end{aligned}$$

et comme $A'(R, t + dt) < 0 \Rightarrow R > R_S(t + dt)$, on a bien $R_S > R_S(t + dt)$ pour tout t .

La coquille sphérique de rayon $R_S(t)$ d'épaisseur infinitésimale et de densité infinie correspondant à la singularité traverse donc le flux comobile en expansion. Mais $A'(R, t)$ étant négative pour les valeurs de R supérieures à $R_S(t)$, la projection de la métrique LTB sur l'hypersurface orthogonale au flux à t constant ne définit plus une métrique 3D sur toute l'hypersurface. Le modèle devient donc inapplicable à partir de la plus petite sphère de cette hypersurface dont les points seraient étiquetés par deux valeurs distinctes de la coordonnée R de la métrique LTB, l'une inférieure et l'autre supérieure à $R_S(t)$, voire une troisième valeur de R proche de 1, puisque A' redevient positive au voisinage de 1.

Au-delà de cette sphère de rayon $R_{LT}(t)$, l'espace-temps ne peut plus être modélisé par la métrique LTB utilisée jusqu'à présent, pour plusieurs raisons : d'une part celle qui vient d'être évoquée, d'autre part la présence d'une densité infinie en $R_S(t)$, et enfin le fait que la masse physiquement présente à l'intérieur d'une sphère de rayon $R > R_{LT}$ ne serait plus $M(R)$ mais

$$\hat{M}(R, t) = M(1) - [M(R_S(t)) - M(R)] - [M(\hat{R}) - M(R_S(t))]$$

où les distances radiales propres correspondant à R et \hat{R} sont identiques.

2.6 Application numérique

Les grandes structures de l'univers (dont les grands vides cosmiques) prennent leur origine dans les anisotropies du CMB telles qu'elles sont visibles dans les cartes publiées par la collaboration Planck. On y constate des fluctuations correspondant aux oscillations "acoustiques" du plasma de baryons et d'électrons, dont l'extension spatiale est d'environ 240000 années-lumières à $z = 1080$.

Pour une zone sphérique de rayon $a(t_i)r_D = 120000$ a.l. à $z = 1080$, alors que la densité de matière était de $2.65 \times 10^{-27} \div 1080^2 = 3.3410^{-18}$ kg.m⁻³, on obtient une masse

$$M(1) \simeq 2.4 \times 10^{46} \text{ kg} \quad \Rightarrow K = \frac{GM(1)}{c^3} \simeq 6 \times 10^{10} \text{ s}$$

Pour passer à l'application, il faut choisir une fonction $f(R)$ qui respecte les contraintes énoncées. Un choix simple (mais arbitraire) est

$$f(R) = \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{2}R\right)$$

$$f(R) + Rf'(R) = \varepsilon \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}R\right) - \frac{\pi}{2}R \sin\left(\frac{\pi}{2}R\right) \right] \text{ s'annule en } R_0 \simeq 0.548.$$

On choisit ε pour que la dernière des conditions aux limites soit respectée :

$$\begin{aligned}\forall R, \quad c^2 E(R) &\lll \frac{GM(R)}{A(R)} = \frac{GM(1)R^3}{A(1, t_i)R} = \frac{GM(1)R^2}{a(t_i)r_D} \\ \forall R, \quad \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi R}{2} &\leq 0.01 \frac{GM(1)}{c^2 a(t_i)r_D} \Rightarrow \varepsilon \leq \sqrt{0.02 \frac{GM(1)}{c^2 a(t_i)r_D}} \simeq 0.017\end{aligned}$$

On prendra $\varepsilon = 0.011$.

Faute de solution analytique simple, on résout numériquement les équations pour obtenir les courbes représentées dans les figures 1 à 4.

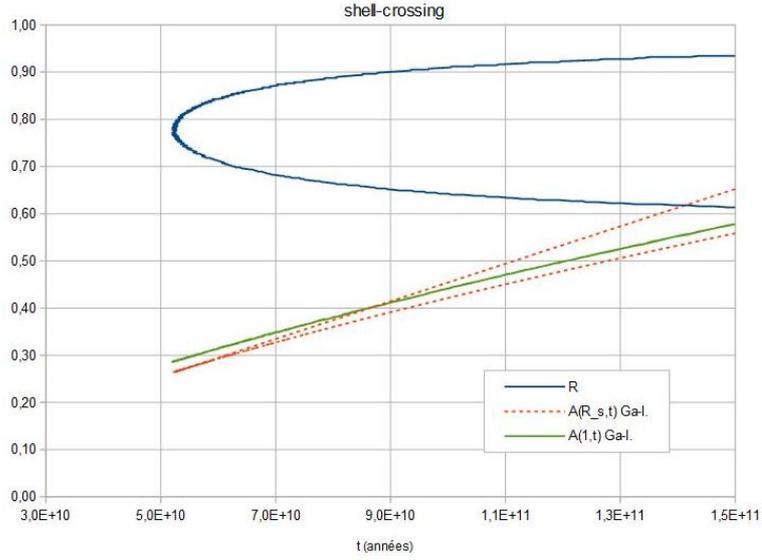


Figure 1: Le phénomène de shell-crossing n'apparaîtra qu'à partir de $t \simeq 50$ milliards d'a.-l, date à partir de laquelle on constate deux valeurs $R_1(t)$ et $R_2(t)$ de R pour lesquelles A' s'annule. La branche supérieure de la courbe $A(R_s, t)$ correspond à la plus petite de ces valeurs, R_1 , à partir de laquelle $A'(R, t)$ est négative et donc $A(R, t)$ décroissante jusqu'à R_2 . $R_2(t)$ est de plus en plus proche de 1 et $A(R_2, t)$ est proche de $A(1, t)$.

On peut donc utiliser la métrique LTB jusqu'à l'époque actuelle pour décrire l'ensemble de la zone sphérique constituant le vide cosmique, dont la densité moyenne est de plus en plus faible et le profil de densité de plus en plus plat. Il est entouré d'une coquille présentant progressivement une densité de plus en plus supérieure à $\rho_M(t)$.

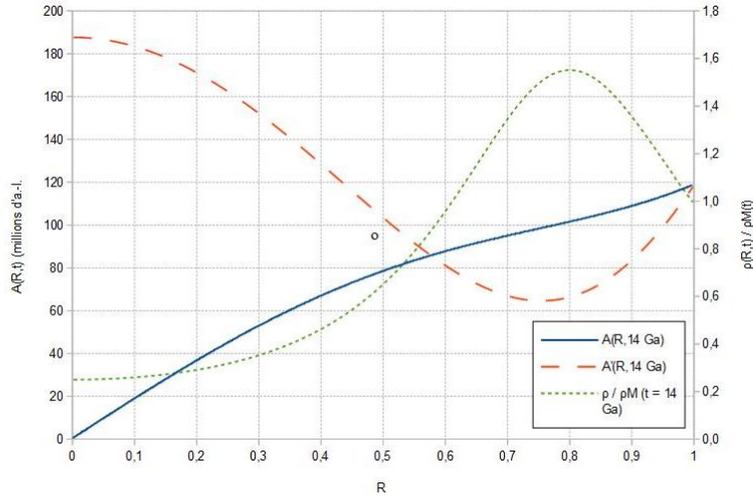


Figure 2: $A(R, t)$, $A'(R, t)$ en milliards d'a.-l. et $\frac{\rho(R, t)}{\rho_M(t)}$ à $t = 14$ milliards d'années.

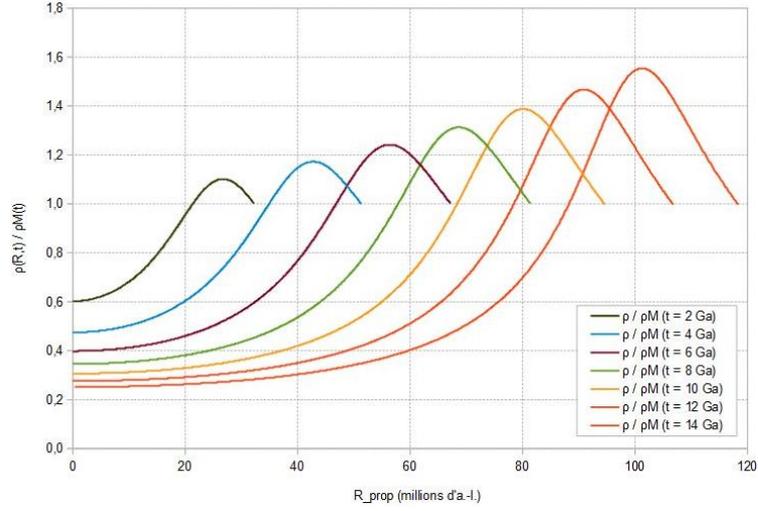


Figure 3: $\rho(R, t)/\rho_M(t)$ en fonction de $R_{prop} \simeq A(R, t)$, pour des valeurs de t tous les 2 milliards d'années. On a fait pour les distances radiales propres l'approximation (justifiée par $2E < \varepsilon^2 \ll 1$)

$$R_{prop}(R, t) = \int_0^R \frac{A'(x, t)}{\sqrt{1 + 2E(x)}} dx \simeq \int_0^R A'(x, t) dx = A(R, t)$$

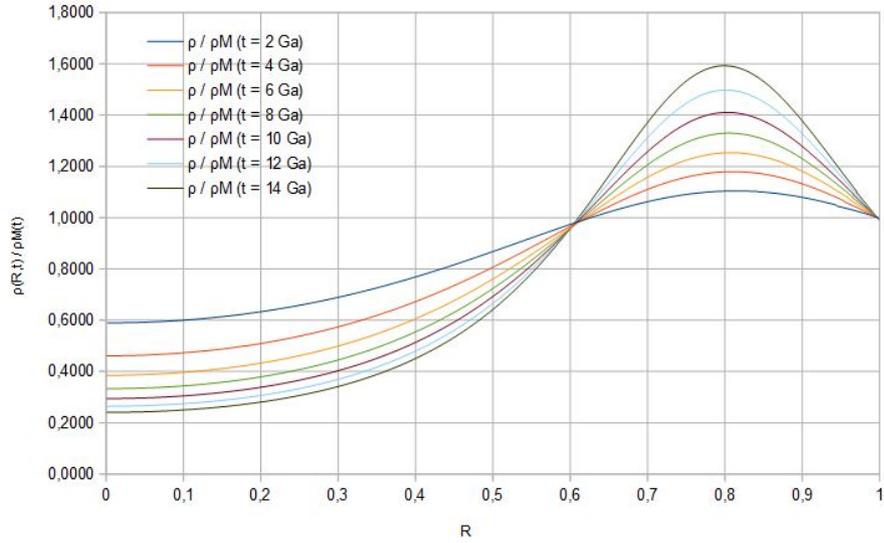


Figure 4: $\rho(R, t)/\rho_M(t)$ en fonction de R , pour des valeurs de t tous les 2 milliards d'années.

3 Modélisation d'une zone de sur-densité

3.1 Résultats généraux

La zone de sur-densité est décrite par la métrique LTB avec courbure spatiale positive ($E(R) > 0$), pour $R < 1$. On impose $t_B \equiv 0$. Les équations ci-dessous sont valides pour $0 < \eta < 2\pi$.

$$A = \frac{GM}{(-2E)}(1 - \cos \eta) \quad (13)$$

$$t = \frac{GM}{(-2E)^{3/2}}(\eta - \sin \eta) \quad (14)$$

On dérive par rapport à t la deuxième équation, puis la première :

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \frac{(-2E)^{3/2}}{GM} \frac{1}{1 - \cos \eta} \\ \dot{A} &= \sqrt{(-2E)} \frac{\sin \eta}{1 - \cos \eta} \\ \ddot{A} &= \frac{(-2E)^2 \cos \eta (1 - \cos \eta) + \sin^2 \eta}{GM (1 - \cos \eta)^3}\end{aligned}$$

3.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites (identiques à celle de la zone de sous-densité), conduisent à

$$\begin{aligned}M = M(1)R^3 &\quad \Rightarrow M' = 3M(1)R^2 &\quad \frac{M'}{M} &= \frac{3}{R} \\ E = -\frac{1}{2}R^2 f(R)^2 &\quad \Rightarrow E' = -Rf(R)[f(R) + Rf'(R)] &\quad \frac{E'}{E} &= \frac{2[f(R) + Rf'(R)]}{Rf(R)}\end{aligned}$$

avec $f(0) = \varepsilon$, $f(1) = 0$, $\forall R \in]0, 1[$ $f'(R) < 0$ et $R^2 f(R)^2 \leq 1\%$ $\left(2 \frac{GM(1)}{A(1, t_i)}\right)$

$A(1, t_i) = a(t_i)r_D$ où a est le facteur d'échelle de la métrique FLRW à l'extérieur de la zone et r_D le rayon de celle-ci⁴ dans le système de coordonnées associé.

3.3 Forme de la solution

On obtient alors

$$\begin{aligned}K &= \frac{GM}{R^3} = GM(1) \\ t &= \frac{K}{f^3}(\eta - \sin \eta) &\quad \Rightarrow \dot{\eta} &= \frac{f^3}{K} \frac{1}{1 - \cos \eta} \\ A &= \frac{KR}{f^2}(1 - \cos \eta) = Rft \frac{1 - \cos \eta}{\eta - \sin \eta} \\ \dot{A} &= Rf \frac{\sin \eta}{1 - \cos \eta} \\ \ddot{A} &= \frac{Rf^4}{K} \frac{-1}{(1 - \cos \eta)^2}\end{aligned}$$

\ddot{A} est toujours négative. \dot{A} devient négative lorsque $\eta > \pi$, début de la phase de contraction. En l'absence d'autre phénomène physique celle-ci se terminerait par une singularité lorsque $\eta = 2\pi$.

\dot{A} s'annule et A atteint son maximum $\frac{2KR}{f^2(R)}$ lorsque $t = \frac{\pi K}{f^3(R)}$. f étant décroissante, la coquille sphérique de rayon R_1 commence donc à se contracter avant toutes celles de rayon $R > R_1$, quel que soit R_1 . Remarque : ces valeurs tendent vers l'infini lorsque R tend vers 1, ce qui signifie que, quelque soit l'âge de l'univers, il reste au voisinage de $R = 1$ des coquilles sphériques en expansion.

D'autre part,

$$\begin{aligned}t' = 0 &= -3K \frac{f'}{f^4}(\eta - \sin \eta) + \frac{K}{f^3} \eta'(1 - \cos \eta) &\quad \Rightarrow \eta' &= 3 \frac{f'}{f} \frac{\eta - \sin \eta}{1 - \cos \eta} \\ A' &= \frac{KR}{f^2} \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{2f'}{f} \right) (1 - \cos \eta) + \frac{3f'}{f} \frac{\sin \eta (\eta - \sin \eta)}{(1 - \cos \eta)} \right] \\ &= \frac{A}{Rf} \left[f + Rf' \left(3 \frac{\sin \eta (\eta - \sin \eta)}{(1 - \cos \eta)^2} - 2 \right) \right]\end{aligned}$$

4. à condition que la métrique LTB reste applicable pour tout $R < 1$, ce qu'on vérifiera plus loin.

La fonction $\left(3 \frac{\sin \eta (\eta - \sin \eta)}{(1 - \cos \eta)^2} - 2\right)$ est strictement négative pour tout $\eta \in]0, 2\pi[$.
 $f'(R)$ étant également strictement négative et $f(R)$ strictement positive pour tout $R \in]0, 1[$,
 $A'(R, t)$ est strictement positive pour tout $R > 0$ et tout $t > 0$.

Cela permet d'utiliser la métrique LTB dans l'ensemble du domaine spatial étudié, depuis $t = 0$ et au moins jusqu'à l'époque où la structure commence à se virialiser.

En faisant pour les distances radiales propres l'approximation (justifiée par $2E < \varepsilon^2 \lll 1$)

$$r_{prop}(R, t) = \int_0^R \frac{A'(x, t)}{\sqrt{1 + 2E(x)}} dx \simeq \int_0^R A'(x, t) dx = A(R, t)$$

Pour qu'une coquille sphérique infinitésimale du flux comobile ait pour rayon propre r_{prop} à la date t , il faut qu'il existe une valeur $S(r_{prop}, t)$ telle que $A(S(r_{prop}, t), t) = r_{prop}$. Cela nécessite

$$\begin{aligned} \cos \eta &= 1 - r_{prop} \frac{f^2(S)}{KS} \quad \text{et} \quad \sin \eta = \eta - f^3(S) \frac{t}{K} \\ &\Rightarrow \left[1 - r_{prop} \frac{f^2(S)}{KS}\right]^2 + \left[\eta - f^3(S) \frac{t}{K}\right]^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Il en résulte } \eta = f^3(S) \frac{t}{K} + \sqrt{1 - \left[1 - r_{prop} \frac{f^2(S)}{KS}\right]^2}$$

(la continuité de la fonction η appliquée aux petites valeurs de t impose que le signe devant la racine soit positif.)

Le deuxième terme (la racine) étant inférieur ou égal à 1, pour S assez petit il devient négligeable dès que $t \ggg \varepsilon^{-3}K$.

3.4 Application numérique

Pour les grandes structures issues des anisotropies du CMB, on conserve les valeurs déterminées dans la section précédente: $M(1) \simeq 2.4 \times 10^{46}$ kg, $K \simeq 6 \times 10^{10}$ s et $\varepsilon \leq 1.7 \times 10^{-2}$. Donc, pour S assez petit, dès que $t > 1.2 \times 10^{16}$ s (environ 390 millions d'années) on peut se contenter de l'approximation $\eta \simeq f^3(S) \frac{t}{K}$. Par conséquent, la contraction des coquilles sphériques de rayon $R \ll 1$ commence à $t \simeq \pi \frac{K}{\varepsilon^3} \simeq 1150$ millions d'années⁵.

On choisit arbitrairement la même fonction $f(R) = \varepsilon \cos \frac{\pi}{2}R$ que dans la section précédente, et on résout numériquement les équations pour obtenir les courbes représentées dans les figures 5 et 6.

3.5 Virialisation

En réalité les particules de matière de la zone étudiée ne sont comobiles qu'en moyenne. Si on considère que chacune d'entre elles est dotée d'une vitesse propre aléatoire, leur énergie cinétique moyenne est supérieure à celle que l'équation (3) attribue à une particule comobile.

5. Si on divise la masse de la zone (et K) par un facteur N , et son rayon initial $A(1, t_i)$ à l'époque de quasi-homogénéité par un facteur $N^{1/3}$, cela conduit à diviser ε^2 par un facteur $N^{2/3}$ et ε^3 par un facteur N , donc ça ne change pas l'ordre de grandeur de t .

En revanche, si on imagine une zone de sur-densité dont le rayon initial est celui des anisotropies du CMB et de courbure moyenne très faible, mais pouvant contenir de petites zones de courbure plus forte (on pense aux futures galaxies), avec par exemple $\varepsilon^2 = 5\% \frac{2GM(1)}{c^2 A(1, t_i)}$, on constate qu'elles commencent à se contracter dès que t est de l'ordre de 100 millions d'années. Pour $M(1)$ de l'ordre de 10^{41} à 10^{42} kg, le rayon de la zone à l'époque du CMB est de l'ordre de 2000 à 4000 années-lumière, bien inférieur à la résolution native des données de Planck (5' d'arc).

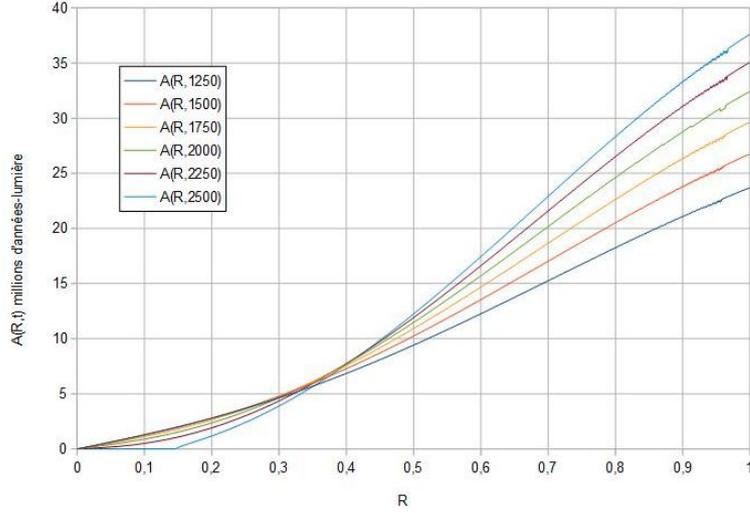


Figure 5: $A(R, t)$ pour des valeurs de t tous les 250 millions d'années pendant la phase de contraction. Celle-ci se manifeste par l'inversion de l'ordre des courbes pour les petites valeurs de R , mettant en évidence la décroissance de $A(R, t)$ à R constant. La singularité centrale apparaît sur la courbe $A(R, 2500)$.

Cet excès d'énergie cinétique conduit à la virialisation, et le théorème du viriel nous indique que chaque coquille sphérique de rayon R va être virialisée à une distance propre de l'origine

$$r_{vir}(R) \simeq \frac{cKR}{f^2(R)}, \text{ la valeur maximale atteinte par } A(R, t) \text{ étant égale à } \frac{2cKR}{f^2(R)}$$

Cette distance propre r_{vir} est atteinte lorsque $\cos \eta = 0$, donc $\eta = \frac{3\pi}{2}$.

La date à laquelle la virialisation de la coquille de rayon R se produit est

$$t_{vir}(R) \simeq \left(\frac{3\pi}{2} + 1 \right) \frac{K}{f^3(R)}$$

Avec la fonction f choisie dans l'application numérique, à la date t , on peut donc estimer que la structure est virialisée jusqu'à $R_{vir}(t) \simeq \frac{2}{\pi} \arccos \left[\frac{(3\pi + 2)K}{2\varepsilon^3 t} \right]^{1/3}$.

et avec la valeur de ε utilisée précédemment, à l'époque actuelle cela conduit à $R_{vir} \simeq 0.64$, et $r_{vir} \simeq 14.5$ millions d'années-lumière, pour un rayon total d'environ 117 millions d'a.-l.

Remarque : on estime que la masse du Superamas de la Vierge est d'environ 2×10^{46} kg, proche de la valeur de $M(1)$ qu'on a calculée, son diamètre est d'environ 200 millions d'années-lumière. Mais il n'est que partiellement virialisé; en fait seuls les amas le sont complètement. En l'occurrence l'amas qui domine le Superamas de la Vierge, est l'Amas de la Vierge, dont le rayon est d'environ 10 millions d'a.-l. L'ordre de grandeur des résultats obtenus est donc compatible avec celui des grandes structures de l'univers récent.

Dans la suite, on va modifier le modèle pour tenir compte de la virialisation en ne conservant la description de la zone étudiée par la métrique LTB que jusqu'à $t_{vir}(R)$ (pour chaque valeur de R), et en considérant qu'à partir de cette date, la coquille sphérique de rayon R se détache du flux comobile et que son rayon propre reste égal à $r_{vir}(R)$ pour tout $t > t_{vir}(R)$ et sa densité de matière reste inchangée.

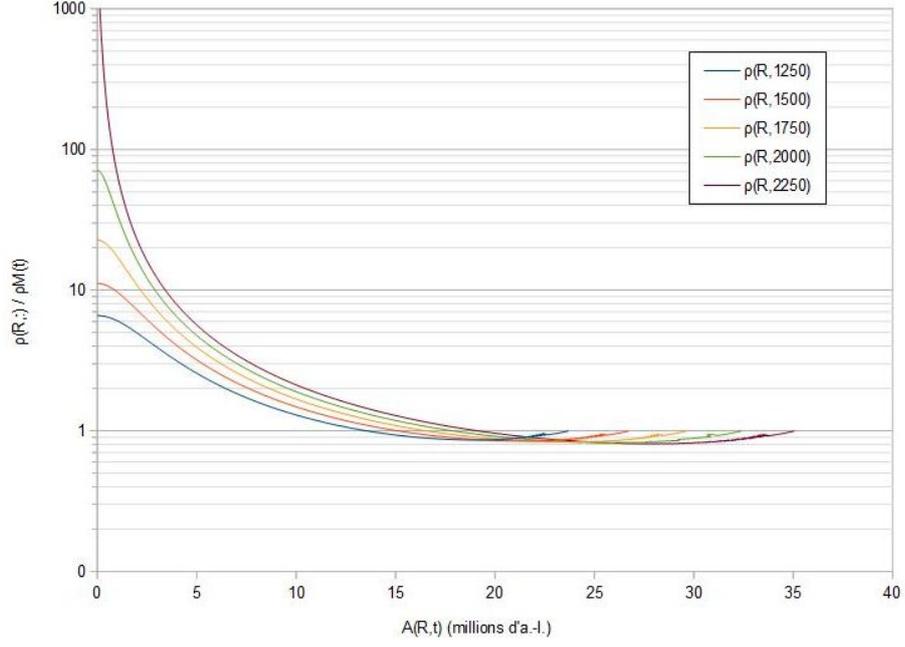


Figure 6: $\rho(R, t)$ en fonction de $R_{prop} \simeq A(R, t)$, pour des valeurs de t tous les 250 millions d'années, avant l'apparition de la singularité centrale.

Pour tout t et pour $R < R_{vir}(t)$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
 3M(1)R^2 &= M'(R) = 4\pi A'(R, t_{\eta=\frac{3\pi}{2}}) r_{vir}^2(R) \rho(R, t) \\
 &= 4\pi \rho \left[\frac{cKR}{f^2} \right]^3 \frac{f + Rf' \left(-3\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right) - 2 \right)}{Rf} = 4\pi \rho \left[\frac{cKR}{f^2} \right]^3 \frac{f + Rf' \left(-\frac{9\pi+10}{2} \right)}{Rf} \\
 \rho(R, t) &= \frac{3M(1)}{4\pi(cK)^3} \frac{f^7}{f - \frac{9\pi+10}{2} Rf'} = \rho_{vir}(R)
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi les résultats présentés dans les figures 7 et 8, où on constate bien la disparition de la singularité centrale.

La forme des courbes montre que le modèle de virialisation ci-dessus est trop simpliste : on y voit une rupture brutale de la pente des fonctions $A(R, t)$ et $\rho(R, t)$ en R_{vir} . C'était prévisible puisque la pente est maximale pour les valeurs de $R \gtrsim R_{vir}(t)$, où $A'(R, t)$ est de plus en plus fortement négative. Dans notre modèle la virialisation est un phénomène instantané, alors qu'en réalité elle se produit progressivement, durant un intervalle de temps considérable.

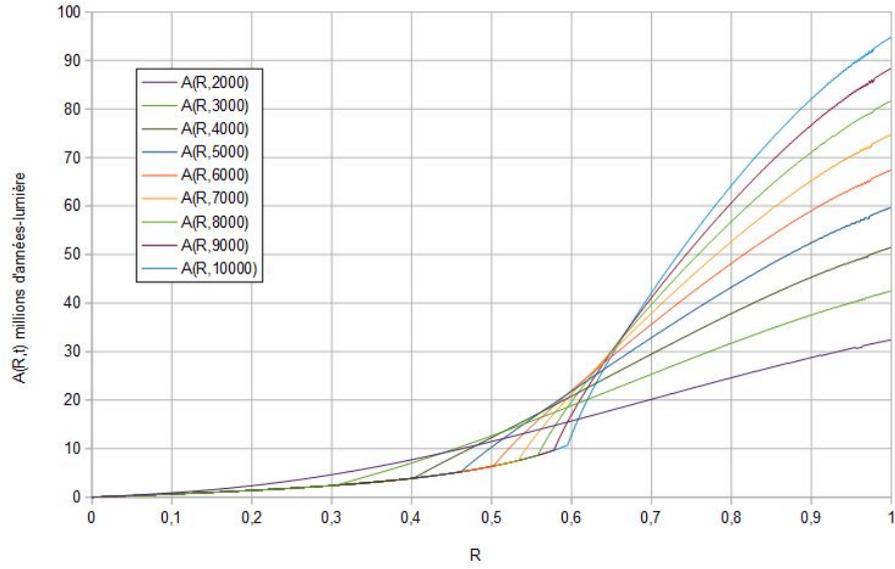


Figure 7: $A(R, t)$ pour des valeurs de t croissantes par intervalle de 1000 millions d'années. La phase de contraction se manifeste par l'inversion de l'ordre des courbes pour les valeurs intermédiaires de R , mettant en évidence la décroissance de $A(R, t)$ à R constant. Cependant, du fait de la virialisation, la singularité centrale n'apparaît plus.

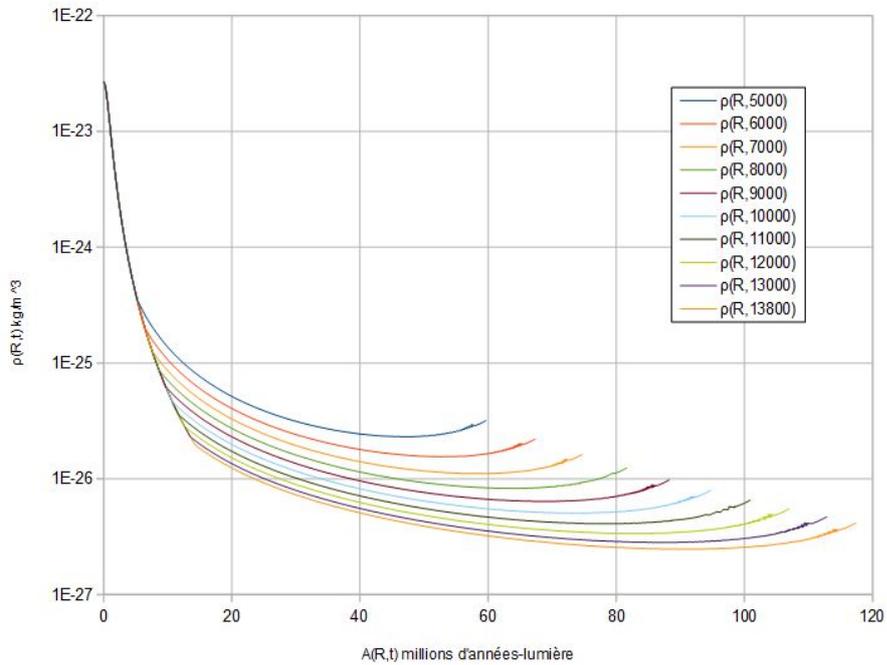


Figure 8: $\rho(R, t)$ en fonction de $R_{prop} \simeq A(R, t)$, pour des valeurs de t tous les 1000 millions d'années, jusqu'à l'époque actuelle.